Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE, TÜBINGEN
K. KNOPP, TÜBINGEN
R. NEVANLINNA, HELSINKI
E. SCHMIDT, BERLIN
F. K. SCHMIDT, HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

66. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. NOVEMBER 1956)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F.K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole *o* und *O*, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28—30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

66. Band — **Inhalt** — 2. Heft

Seite

Vidav, I., Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren . . . 121
Nef, W., Über die Fortsetzung monotoner Linearformen 129
Morgenstern, D., Eine Verschärfung der Ostrowskischen Determinantenabschätzung 143
Schaefer, H., Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen 147
Kasch, F., Abschätzung der Dichte von Summenmengen. III 164
Dinghas, A., Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen 173
Meschkowski, H., Rekursive reelle Zahlen 189

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 121—128 (1956)

Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren

Von
IVAN VIDAV

1. Die beschränkten Operatoren des HILBERTschen Raumes bilden eine BANACHsche Algebra, in der die Involution $X \to X^*$ der adjungierten Operatoren den folgenden fünf Bedingungen genügt:

1°. $X^{**} = X$, 2°. $(\lambda X + \mu Y)^* = \bar{\lambda} X^* + \bar{\mu} Y^*$,

3°. $(XY)^* = Y^* X^*$, 4°. $\|X^* X\| = \|X\|^2$,

5°. Es existiert $(1 + X^* X)^{-1}$.

Hier bedeuten X, Y beliebige Operatoren und λ, μ komplexe Zahlen.

Wie bekannt, haben I. M. GELFAND und M. A. NEUMARK bewiesen [*1*], daß die Postulate 1° bis 5° die Unteralgebren dieser Algebra vollständig charakterisieren: Jede BANACHsche Algebra mit einer Involution, die den Bedingungen 1° bis 5° genügt, läßt sich isometrisch-isomorph auf eine gleichmäßig abgeschlossene Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes abbilden. Das fünfte Postulat erwies sich übrigens als überflüssig, weil es aus den vier anderen Postulaten folgt (s. [*6*], S. 884).

Wenn $X^* = X$, so nennt man den Operator X selbstadjungiert. Das Ziel dieser Arbeit ist nun, ein anderes System von Postulaten aufzustellen, das die genannten Algebren mittels einer metrischen Kennzeichnung der in ihnen enthaltenen selbstadjungierten Operatoren charakterisiert. Sei also $\mathfrak{B}$ eine BANACHsche Algebra mit Einheitselement, das wir mit 1 bezeichnen wollen. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

I. *Es sei H eine Untermenge von $\mathfrak{B}$, die folgenden drei Bedingungen genügt:*

A. *Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ läßt sich mindestens in einer Weise in der Form $x = h + ig$ schreiben, wo $h, g \in H$ und $i^2 = -1$.*

B. *Gehört h zu H und ist ξ eine reelle Zahl, so gilt $\|1 + i\xi h\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn ξ gegen Null strebt.*

C. *Für jedes $h \in H$ existiert eine Zerlegung $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, so, daß $uv = vu$ ist.*

Dann hat die Algebra $\mathfrak{B}$ die folgenden Eigenschaften:

1. *Die Zerlegung $x = h + ig$ ist für jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig.*

2. *Wird $x^* = h - ig$ gesetzt, falls $x = h + ig$ gilt, so ist die Abbildung $x \to x^*$ eine Involution in $\mathfrak{B}$, die den Postulaten 1°, 2°, 3° und 5° genügt. Für die Elemente $h \in H$ gilt auch 4°, also $\|h^2\| = \|h\|^2$.*

3. *$\|x\|_0 = \|x^* x\|^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm in $\mathfrak{B}$, die der ursprünglichen $\|x\|$ äquivalent ist.*

Für diese Norm gilt offenbar allgemein $\|x^* x\|_0 = \|x\|_0^2$, d.h. das Postulat 4° besteht. Daher läßt sich $\mathfrak{B}$ isomorph und stetig auf eine gleichmäßig abgeschlossene Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes so abbilden, daß die Elemente aus H in die selbstadjungierten Operatoren mit derselben Norm übergehen.

2. Es sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige BANACHsche Algebra mit Einheitselement 1.

Definition 1. *Die Elemente $u \in \mathfrak{B}$, die der Bedingung* B *aus Satz I genügen, werden wir die selbstadjungierten Elemente von $\mathfrak{B}$ nennen. Es gilt also $\|1 + i\xi u\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn ξ reell ist und gegen Null strebt.*

Sei H' die Menge aller selbstadjungierten Elemente von $\mathfrak{B}$. Wir wollen zunächst einige Eigenschaften dieser Elemente ableiten. Offenbar enthält H' alle Elemente von der Form $\xi \cdot 1$, wo ξ eine reelle Zahl bedeutet. In der Algebra aller beschränkten Operatoren eines HILBERTschen Raumes sind die selbstadjungierten Operatoren und nur diese auch im Sinne der Definition 1 selbstadjungiert, was leicht einzusehen ist.

Die Norm $\|1 + i\xi u\|$ ist eine konvexe Funktion des reellen Parameters ξ. Es gilt daher $\|1 + i\xi u\| \leq 1 + o(\xi)$ für $\xi \to 0$ nur dann, wenn $\|1 + i\xi u\| = 1 + o(\xi)$ bei $\xi \to 0$ ist.

Hilfssatz 1. *Es gilt $\|e^{i\xi u}\| = 1$ und allgemeiner $\|a e^{i\xi u}\| = \|a\|$, wobei $u \in H'$ und $a \in \mathfrak{B}$ beliebig sind und ξ eine reelle Zahl bedeutet.*

Beweis. Die Funktion $e^{\zeta u}$ ist definiert durch die Reihe

$$e^{\zeta u} = 1 + \frac{\zeta u}{1!} + \frac{\zeta^2 u^2}{2!} + \cdots .$$

Wird $\varphi(\xi) = \log \|e^{i\xi u}\|$ bei reellem ξ gesetzt, so hat man $\varphi(\xi_1 + \xi_2) = \log \|e^{i(\xi_1 + \xi_2)u}\| \leq \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)$. Die stetige Funktion $\varphi(\xi)$ ist daher im Intervall $-\infty < \xi < \infty$ subadditiv. Nach Definition 1 hat man

$$\varphi'(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\log \|1 + i\xi u\|}{\xi} = 0.$$

Daraus folgt, daß $\varphi(\xi)$ identisch verschwindet (s. [2], S. 144). Es ist also $\|e^{i\xi u}\| = 1$.

Sei nun $a \in \mathfrak{B}$ beliebig. Man bekommt leicht

$$\|a e^{i\xi u}\| \leq \|a\| \cdot \|e^{i\xi u}\| = \|a\|, \qquad \|a\| = \|a e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi u}\| \leq \|a e^{i\xi u}\|,$$

d.h. $\|a e^{i\xi u}\| = \|a\|$. Im besonderen hat man $\|e^{\zeta u}\| = \|e^{\xi u}\|$ für $\zeta = \xi + i\eta$, wenn ξ und η reell sind. Ebenso beweist man, daß $\|e^{i\xi u} a\| = \|a\|$ ist.

Hilfssatz 2. (a) *Aus $u \in H'$ folgt $\xi u \in H'$ für jede reelle Zahl ξ.*

(b) *Mit u und v gehören auch $u + v$ und $i(uv - vu)$ zu H'.*

(c) *Es ist $u + iv = 0$ nur für $u = v = 0$, wenn $u, v \in H'$.*

(d) *Die Menge H' ist in $\mathfrak{B}$ abgeschlossen.*

(e) *Das Spektrum von $u \in H'$ ist reell.*

Beweis. Die Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Definition 1.

(b) Nach Hilfssatz 1 ergibt sich, wenn $u, v \in H'$, daß

$$\|e^{i\xi u} \cdot e^{i\xi v}\| = \|e^{i\xi u}\| = 1 .$$

Daraus erhält man $\|1+i\xi(u+v)\| = 1+O(\xi^2)$ für $\xi \to 0$. Die Summe $u+v$ gehört also zu H'. Ebenso bekommt man

$$\|e^{i\xi u} \cdot e^{i\xi v} \cdot e^{-i\xi u} \cdot e^{-i\xi v}\| = 1 , \qquad \|e^{i\xi v} \cdot e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi v} \cdot e^{-i\xi u}\| = 1$$

und daraus

$$\|1 - \xi^2(uv - vu)\| = 1 + O(\xi^3) , \qquad \|1 + \xi^2(uv - vu)\| = 1 + O(\xi^3) .$$

Es ist also $\|1+\xi(uv-vu)\| = 1+o(\xi)$ für $\xi \to 0$, d.h. $i(uv-vu) \in H'$.

(c) Sei $u+iv=0$ und $u, v \in H'$. Betrachten wir die Funktion $f(\zeta) = e^{\zeta u}$, $\zeta = \xi + i\eta$. Aus Hilfssatz 1 ergibt sich

$$\|f(\zeta)\| = \|e^{\xi u}\| = \|e^{-i\xi v}\| = 1 .$$

Nach dem verallgemeinerten Satz von Liouville ([2], S. 59) ist die Funktion $f(\zeta)$ konstant $=1$, also $u=0$.

(d) Sei a ein Häufungspunkt der Menge H'. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $u_\varepsilon \in H'$ so, daß $\|u_\varepsilon - a\| < \varepsilon$ ist. Es ist also

$$\|1 + i\xi a\| \leq \|1 + i\xi u_\varepsilon\| + \xi\|u_\varepsilon - a\| < 1 + 2\varepsilon\xi ,$$
$$\|1 - i\xi a\| \geq \|1 - i\xi u_\varepsilon\| - \xi\|u_\varepsilon - a\| > 1 - 2\varepsilon\xi$$

für jede genügend kleine positive Zahl ξ. Daraus folgt $\|1+i\xi a\| = 1+o(\xi)$ für $\xi \to 0$, d.h. $a \in H'$.

(e) Da $\|e^{iu}\| = \|e^{-iu}\| = 1$ ist, liegt das Spektrum von e^{iu}, $u \in H'$, auf dem Einheitskreis, das von u also auf der reellen Achse.

Aus den Eigenschaften (a) bis (d) erkennt man, daß die Elemente $u \in H'$ einen reellen Banachschen Raum bilden.

Hilfssatz 3. *Ist* $(\lambda, \varkappa)$, $\lambda \leq \varkappa$, *das kleinste Intervall der reellen Achse, auf dem das Spektrum des Elementes* $u \in H'$ *liegt, so ist* $\|e^{\xi u}\| = e^{\varkappa\xi}$ *und* $\|e^{-\xi u}\| = e^{-\lambda\xi}$ *für alle Zahlen* $\xi \geq 0$.

Beweis. Betrachten wir die Funktion $\varphi(\xi) = \log\|e^{\xi u}\|$, die für $\xi > 0$ stetig und subadditiv ist. Folglich existiert

$$\varkappa = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \inf_{\xi > 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} .$$

Die Zahl $\varkappa$ liegt wegen $\|e^{\xi u}\| \leq e^{\xi\|u\|}$ und $\|e^{\xi u}\| \geq \|e^{-\xi u}\|^{-1} \geq e^{-\xi\|u\|}$ zwischen $-\|u\|$ und $\|u\|$. Aus $\varphi(\xi) \geq \varkappa\xi$ bekommt man $\|e^{\xi u}\| \geq e^{\varkappa\xi}$ für jedes $\xi \geq 0$.

Die Funktion $f(\zeta) = e^{\zeta(u-\varkappa)}$, $\zeta = \xi + i\eta$, wo ξ und η reelle Zahlen sind, ist in der komplexen Ebene im Endlichen überall regulär. Da $\|f(\zeta)\| = \|e^{\xi(u-\varkappa)}\|$ und $\|f(i\eta)\| = 1$ nach Hilfssatz 1 ist, folgt aus der Bedeutung der Zahl $\varkappa$, daß der Ausdruck $\|f(\zeta)e^{-\varepsilon\zeta}\|$ für jedes $\varepsilon > 0$ gegen Null strebt, wenn $\xi \to \infty$.

Aus der Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von G. POLYA und G. SZEGÖ ([5], S. 147, s. auch [2], S. 60) ergibt sich nun, daß überall in der Halbebene $\xi>0$ die Abschätzung $\|e^{\xi(u-\varkappa)}\|\leq 1$ gilt, insbesondere also $\|e^{\xi u}\|\leq e^{\varkappa\xi}$. Unter Berücksichtigung der Ungleichung $\|e^{\xi u}\|\geq e^{\varkappa\xi}$ bekommt man so $\|e^{\xi u}\|=e^{\varkappa\xi}$.

Ähnlich erhält man für $\xi>0$ die Gleichung $\|e^{-\xi u}\|=e^{-\lambda\xi}$, wo

$$\lambda=-\lim_{\xi\to\infty}[\log\|e^{-\xi u}\|]/\xi$$

bedeutet. Wird nun $\tau=\mathrm{Max}(\varkappa,-\lambda)$ gesetzt, dann gilt $\|e^{\zeta u}\|\leq e^{\tau|\zeta|}$ für alle ζ. Offenbar hat man

$$\tau=\limsup_{\zeta\to\infty}\frac{\log\|e^{\zeta u}\|}{|\zeta|}.$$

Wir werden aber zeigen, daß $\tau=\lim_{n\to\infty}\|u^n\|^{1/n}=\|u\|_{sp}$ ist, wenn allgemein $\|x\|_{sp}$ den Spektralradius von x bedeutet. Man sieht zunächst leicht, daß $\tau\leq\|u\|_{sp}$ gilt. Um die Abschätzung $\tau\geq\|u\|_{sp}$ abzuleiten, betrachten wir das Integral

$$c=\int_0^\infty e^{\xi(u-\varrho)}\,d\xi.$$

Dieses Integral konvergiert, wenn die reelle Zahl $\varrho>\varkappa$ und es ist dann $c(u-\varrho)=-1$. Es existiert also $(u-\varrho)^{-1}$ für $\varrho>\varkappa$. Ebenso beweist man die Existenz von $(u-\varrho)^{-1}$ für $\varrho<\lambda$. Das Spektrum von u liegt daher zwischen λ und $\varkappa$. Daraus folgt $\|u\|_{sp}\leq\tau$ und dann $\|u\|_{sp}=\tau$.

Sei nun (α,β), $\alpha\leq\beta$, das kleinste Intervall, auf dem das Spektrum von u liegt. Es gilt $\mathrm{Max}(\beta,-\alpha)=\|u\|_{sp}$ und $\lambda\leq\alpha\leq\beta\leq\varkappa$. Betrachten wir jetzt das Element $u-\lambda$. Hier bekommt man $\|u-\lambda\|_{sp}=\mathrm{Max}(\beta-\lambda,\lambda-\alpha)$ und $\|u-\lambda\|_{sp}=\mathrm{Max}(\varkappa-\lambda,0)$. Da $\lambda-\alpha<0$ ist, folgt daraus $\beta-\lambda=\varkappa-\lambda$, also $\beta=\varkappa$. Ebenso erkennt man, daß $\alpha=\lambda$ ist. Damit haben wir den Hilfssatz 3 bewiesen.

Als eine leichte Folge davon ergibt sich:

Hilfssatz 3*. *Für jedes $u\in H'$ und $\xi>0$ gilt $\|1+\xi u\|=1+\varkappa\xi+o(\xi)$ und $\|1-\xi u\|=1-\lambda\xi+o(\xi)$, wenn $\xi\to 0$.*

Die Zahlen $\varkappa$ und λ haben hier dieselbe Bedeutung wie oben. Sind diese Zahlen beide gleich Null, so gehört $iu\in H'$. Daraus folgt $u=0$ (Hilfssatz 2c).

Definition 2. *Ein Element $u\in H'$ werden wir als positiv bezeichnen, wenn sein Spektrum nicht negativ ist.*

Ein Element $u\in H'$ ist also positiv dann und nur dann, wenn $\lambda\geq 0$.

Hilfssatz 4. *Die positiven Elemente $u\in H'$ bilden einen abgeschlossenen Kegel $\mathfrak{P}$, der im Raum H' innere Punkte besitzt.*

Beweis. Offenbar folgt aus $u\in\mathfrak{P}$ und $\xi>0$, daß auch $\xi u\in\mathfrak{P}$. Sind nun u und v zwei Elemente aus $\mathfrak{P}$, so ist nach Hilfssatz 3*: $\|1-\xi u\|\leq 1+o(\xi)$ und $\|1-\xi v\|\leq 1+o(\xi)$ für $\xi>0$. Daraus folgt $\|1-\xi(u+v)\|\leq 1+o(\xi)$, wenn $\xi\to 0$ und $\xi>0$. Für die Summe $u+v$ ist die zugehörige Zahl $\lambda\geq 0$, also $u+v\in\mathfrak{P}$. Damit ist bewiesen, daß die positiven Elemente einen Kegel $\mathfrak{P}$

im Raum H' bilden. Da sich das Spektrum von u stetig mit u ändert, ist $\mathfrak{P}$ abgeschlossen. Alle $u \in H'$ mit $\|1-u\| \leq 1$ gehören offenbar zu $\mathfrak{P}$. Also besitzt $\mathfrak{P}$ innere Punkte im Raum H'.

3. Von nun an genüge die Algebra $\mathfrak{B}$ den Bedingungen A, B, C aus Satz I. Die Mengen H' und H sind hier offenbar identisch und die Zerlegung $x = h + ig$ ist nach Hilfssatz 2(c) eindeutig.

Hilfssatz 5. *Aus $h \in H$ folgt $h^2 \in H$.*

Beweis. Sei $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, wo wegen C $uv = vu$ ist. Da h ein reelles Spektrum hat, gilt dasselbe für h^2. Das Spektrum von e^{ih^2} liegt daher auf dem Einheitskreis. Daraus folgt

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \|e^{inh^2}\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|e^{-nv}\|^{1/n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \|e^{nv}\|^{1/n} = \lim \|e^{-inh^2}\|^{1/n} = 1.$$

Betrachten wir jetzt die Funktion $e^{\xi v} = e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi h^2}$ der reellen Variablen ξ. Nach Hilfssatz 3 gibt es zwei solche Zahlen $\lambda, \varkappa$, $\lambda < \varkappa$, daß $\|e^{\xi v}\| = e^{\varkappa\xi}$ und $\|e^{-\xi v}\| = e^{-\lambda\xi}$ für $\xi > 0$ gilt. Wegen (1) ist aber $\varkappa = \lambda = 0$. Daraus folgt $v = 0$, d.h. $h^2 \in H$.

Ist nun $x = h + ig$, $h, g \in H$, so setze man $x^* = h - ig$. Man erkennt leicht, daß die Abbildung $x \to x^*$ eine Involution definiert, die den Postulaten 1°, 2°, 3° genügt.

Sei nun $h \in H$ beliebig. Für reelle ξ gehört auch $e^{\xi h}$ zu H und es gilt $\|e^{nh}\| = \|e^h\|^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (Hilfssatz 3).

Das Spektrum des Elementes $1 + i\xi h$ liegt auf einer Parallelen zur imaginären Achse. Da der Punkt $\lambda = 0$ für $\xi \neq 0$ zu der sog. Hauptkomponente der Resolventenmenge gehört, so existiert $\log(1 + i\xi h)$. Es ist

$$\log(1 + i\xi h) = ih \int_0^\xi (1 + i\tau h)^{-1} d\tau = u + iv,$$

wo

$$u = h^2 \int_0^\xi (1 + \tau^2 h^2)^{-1} \tau \, d\tau, \qquad v = h \int_0^\xi (1 + \tau^2 h^2)^{-1} d\tau$$

bedeuten. Aus den Hilfssätzen 2 und 5 folgt nun, daß u und v zu H gehören und daß sie miteinander vertauschbar sind. Daraus erhält man

$$1 + i\xi h = e^u \cdot e^{iv}, \qquad 1 - i\xi h = e^u \cdot e^{-iv}.$$

Es ist also $\|1 + i\xi h\| = \|e^u\|$ und

$$\|1 + \xi^2 h^2\| = \|e^{2u}\| = \|e^u\|^2 = \|1 + i\xi h\|^2.$$

Dies gilt für jede reelle Zahl ξ. Wegen der Stetigkeit der Norm folgt daraus

$$(2) \qquad \|h^2\| = \|h\|^2, \quad \text{wenn } h \in H.$$

Die selbstadjungierten Elemente aus H erfüllen also das Postulat 4°.

Aus (2) ergibt sich nun leicht, daß ganz allgemein $\|h^n\| = \|h\|^n$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist. Daraus folgt $\|h\|_{sp} = \|h\|$, wenn $h \in H$.

Läßt sich ein Element $x \in \mathfrak{B}$ in der Form $x = e^{iu}h$, $u, h \in H$, schreiben, so hat man $\|x\| = \|h\|$, $x^*x = h^2$ und $\|x^*x\| = \|xx^*\| = \|x\|^2$. Für die Elemente dieser Form gilt also allgemein das Postulat 4°.

Hilfssatz 6. *Jedes positive Element h hat eine Quadratwurzel, d.h. es gibt ein $u \in \mathfrak{P}$ so, daß $h = u^2$ ist.*

Offenbar kann man beim Beweis $\|h\| \leq 1$ annehmen. Dann liegen die Spektra von h und $1-h$ zwischen 0 und 1 und es ist deshalb auch $\|1-h\| \leq 1$. Nun konvergiert die TAYLORsche Reihe für $(1-\xi)^{\frac{1}{2}}$ absolut und gleichmäßig für $|\xi| \leq 1$. Die Reihe

$$u = 1 - \frac{1}{2}(1-h) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}(1-h)^2 - \cdots$$

bestimmt daher eindeutig ein Element $u \in H$. Dieses u hat ein positives Spektrum, da alle endlichen Abschnitte der Reihe $(1-\xi)^{\frac{1}{2}}$ für $0 \leq \xi \leq 1$ positiv sind. Es ist also $h = u^2$ und $u \in \mathfrak{P}$. Sind h und g zwei vertauschbare positive Elemente, u und v die zugehörigen Quadratwurzeln, so ist auch $uv = vu$. Daraus folgt $hg = u^2v^2 = (uv)^2 \in \mathfrak{P}$.

Es bedeute $|h|$ die positive Quadratwurzel aus h^2, wo $h \in H$. Man kann sich leicht überzeugen, daß $|h|+h$ und $|h|-h$ positiv sind. Wird also $p = \frac{1}{2}(|h|+h)$ und $q = \frac{1}{2}(|h|-h)$ gesetzt, so ist $h = p-q$, $pq = 0$ und $p, q \in \mathfrak{P}$. Daraus folgt in bekannter Weise [6], daß für jedes $x \in \mathfrak{B}$ das Produkt x^*x positiv ist und $x^*x = 0$ nur für $x = 0$ gilt.

Hilfssatz 7. *Die Involution $x \to x^*$ ist stetig.*

Beweis. Sei $y \in \mathfrak{B}$ beliebig und $g \in H$. Es ist

$$\|y(1 + i\xi g)\| = \|y e^{i\xi g}\| + o(\xi) = \|y\| + o(\xi),$$

wenn $\xi \to 0$. Setzt man in diese Gleichung $y = 1 + \xi h$, $h \in H$, so bekommt man $\|1 + \xi(h + ig)\| = \|1 + \xi h\| + o(\xi)$. Bei passend gewähltem Vorzeichen von ξ ist dann $\|1 + \xi(h+ig)\| = 1 + |\xi| \cdot \|h\| + o(\xi)$ (s. Hilfssatz 3*). Daraus ergibt sich $\|h + ig\| \geq \|h\|$ und $\|h + ig\| \geq \|g\|$. Es ist also

$$\|h\| + \|g\| \geq \|h + ig\| \geq \operatorname{Max}(\|h\|, \|g\|).$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x^*\| \leq 2\|x\|. \tag{3}$$

Die Involution $x \to x^*$ ist daher stetig.

4. Betrachten wir nun zwei beliebige BANACHsche Algebren $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Es seien H_1' und H_2' die zugehörigen Mengen der selbstadjungierten Elemente im Sinne der Definition 1. Wir wollen zunächst den folgenden allgemeinen Satz beweisen [3]:

II. *Sei $f(x)$ eine solche lineare Abbildung der Elemente von $\mathfrak{B}_1$ auf Elemente von $\mathfrak{B}_2$, daß α) $f(1) = 1$[1]) und β) $\|f(x)\| \leq \|x\|$ ist. Dann folgt aus $u \in H_1'$, daß*

[1]) Das heißt das Einheitselement von $\mathfrak{B}_1$ bildet sich auf das Einheitselement von $\mathfrak{B}_2$ ab.

$f(u) \in H_2'$. *Gehören auch* u^2 *zu* H_1' *und* $f^2(u)$ *zu* H_2', *so ist* $f(u^2) \geq f^2(u)$, *d.h. die Differenz* $f(u^2) - f^2(u)$ *ist positiv oder Null.*

Beweis. Da $u \in H_1'$, so ist $\|e^{i\xi u}\| = 1$ für reelle ξ. Es gilt also nach β): $\|f(e^{i\xi u})\| \leq 1$. Daraus folgt $\|1 + i\xi f(u)\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn $\xi \to 0$. Das Bild $f(u)$ genügt also der Bedingung B aus Satz I, d.h. $f(u) \in H_2'$. Nehmen wir nun an, daß auch $u^2 \in H_1'$ und $f^2(u) \in H_2'$. Weil $\|f(e^{i\xi u})\, e^{-i\xi f(u)}\| \leq \|f(e^{i\xi u})\| \cdot \|e^{-i\xi f(u)}\| \leq 1$ für reelle ξ gilt, folgt daraus

$$\|1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 [f(u^2) - f^2(u)] + \cdots\| \leq 1. \tag{4}$$

Möge das Spektrum der Differenz $f(u^2) - f^2(u)$ zwischen λ und $\varkappa$, $\lambda < \varkappa$, liegen. Wäre nun diese Differenz nicht positiv, so wäre $\lambda < 0$. Nach dem Hilfssatz 3* hat man aber

$$\|1 - \tfrac{1}{2}\xi^2 [f(u^2) - f^2(u)]\| = 1 - \tfrac{1}{2}\lambda\xi^2 + o(\xi^2), \qquad \xi \to 0,$$

was für $\lambda < 0$ der Ungleichung (4) widerspricht. Damit ist der Satz II bewiesen.

Sei jetzt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ unsere Algebra, die den Bedingungen A, B, C genügt. Man erkennt leicht, daß der Satz II in diesem Fall auch dann gilt, wenn man $\|f(x)\|^2 \leq \|x^* x\|$ fordert.

Ist $\mathfrak{B}_2$ die Algebra der komplexen Zahlen, so bedeutet $f(x)$ ein lineares Funktional. Gilt die Abschätzung $|f(x)| \leq \|x\|$ oder $|f(x)|^2 \leq \|x^* x\|$ und ist $f(1) = 1$, so folgt aus dem Satz II, daß $f(x)$ für $h \in H$ reelle Werte annimmt und $f(h^2) \geq f^2(h) \geq 0$ ist. Da sich jedes positive Element h als Quadrat eines selbstadjungierten Elementes schreiben läßt, ist $f(h) \geq 0$ für ein solches h. Im besonderen gilt also $f(x^* x) \geq 0$. *Es ist also* $f(x)$ *ein positives Funktional.* Umgekehrt: Ist das Funktional $f(x)$ positiv und $f(1) = 1$, so gilt bekanntlich die Abschätzung $|f(x)|^2 \leq \|x^* x\|$.

Hilfssatz 8. *Ist* $\mathfrak{J}_l$ *ein eigentliches abgeschlossenes Linksideal von* $\mathfrak{B}$, *so existiert ein positives Funktional* $f(x)$ *derart, daß* $f(x) = 0$ *für jedes* $x \in \mathfrak{J}_l$.

Beweis [4]. Alle Elemente von der Form $y + \lambda$, wo $y \in \mathfrak{J}_l$ und λ komplex ist, bilden einen Unterraum $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$. Setzt man $f(y + \lambda) = \lambda$, so ist das Funktional $f(x)$ überall in $\mathfrak{R}$ erklärt und $f(1) = 1$. Bei jedem $y \in \mathfrak{J}_l$ ist aber $\|1 + y\| \geq 1$, da andernfalls y ein inverses Element besäße, was wegen $y \in \mathfrak{J}_l$ nicht möglich ist. Es ist daher $|f(x)| \leq \|x\|$, wenn x in $\mathfrak{R}$ liegt. Nach dem bekannten Satz von Hahn-Banach kann man aber $f(x)$ auf den ganzen Raum $\mathfrak{B}$ so erweitern, daß überall $|f(x)| \leq \|x\|$ gilt. Dieses Funktional ist nach Satz II positiv und man hat $f(x) = 0$, also auch $f(x^* x) = 0$, für jedes $x \in \mathfrak{J}_l$.

Hilfssatz 9. *Wenn die reelle Zahl* λ *zu dem Spektrum des selbstadjungierten Elementes* h *gehört, dann gibt es ein positives Funktional* $f(x)$ *so, daß* $f(h) = \lambda$ *und* $f(1) = 1$.

Die abgeschlossene Menge $[z = a(h - \lambda),\ a \in \mathfrak{B}]$ ist bekanntlich ein eigentliches Linksideal $\mathfrak{J}_l$. Es existiert also ein $f(x)$ so, daß $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathfrak{J}_l$. Im besonderen ergibt sich daraus $f(h - \lambda) = 0$, also $f(h) = \lambda$.

Für jedes $x \in \mathfrak{B}$ ist x^*x positiv und die Zahl $\|x^*x\|$ gehört zu dem Spektrum von x^*x. Es existiert daher ein positives Funktional so, daß $f(x^*x) = \|x^*x\|$. Da anderseits stets $f(x^*x) \leq \|x^*x\|$ gilt, folgt daraus

$$\|x^*x\| = \sup f(x^*x),$$

wo $\sup f(x^*x)$ bei festem x für alle positiven Funktionale $f(x)$ mit $f(1) = 1$ zu nehmen ist.

Wie bekannt [4], ist $\|x\|_0 = [\sup f(x^*x)]^{\frac{1}{2}}$, d.h. $\|x\|_0 = \|x^*x\|^{\frac{1}{2}}$, eine neue Norm in $\mathfrak{B}$. Die Äquivalenz dieser Norm $\|x\|_0$ mit der ursprünglichen $\|x\|$ erkennt man so: Nach (3) hat man zunächst $\|x\|_0^2 = \|x^*x\| \leq 2\|x\|^2$. Die Produkte x^*x und xx^* haben dasselbe Spektrum. Folglich ist $\|x^*x\| = \|x\,x^*\|$. Sei nun $x = h + ig$, $h, g \in H$. Es gilt also

$$\|x\|_0^2 = \tfrac{1}{2}(\|x^*x\| + \|xx^*\|) \geq \tfrac{1}{2}\|x^*x + xx^*\| = \|h^2 + g^2\| \geq \operatorname{Max}(\|h\|^2, \|g\|^2) \geq \tfrac{1}{4}\|x\|^2.$$

Daraus folgt $\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \|x\|\sqrt{2}$. Damit ist der Beweis des Satzes I vollständig erbracht.

Literatur

[1] GELFAND, I., and M. NEUMARK: On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. Mat. Sbornik, N. S. **12** (54), 197—213 (1943). — [2] HILLE, E.: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Coll. Publ. **31** (1948). — [3] KADISON, R. V.: A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. Ann. of Math. (2) **56**, 494—503 (1952). — [4] NAIMARK, M. A.: Involutive Algebren. Uspechi mat. Nauk **3**, Nr. 5 (27), 52—145 (1948) [Russisch]. — [5] POLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I. Die Grundlehren der Math. Wiss., Bd. XIX. 1925. — [6] SCHATZ, J. A.: Besprechung einer Abhandlung von M. FUKAMIYA. Math. Reviews **14**, 884 (1953).

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 28. Dezember 1955)

Nef, W.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 129—142 (1956)

Über die Fortsetzung monotoner Linearformen

Von
Walter Nef

1. Teil: Einleitung

In einer kürzlich publizierten Arbeit habe ich die *monotonen Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen untersucht*[1]). Dabei galt das hauptsächliche Interesse den folgenden beiden Fragen:

1. Gegeben ist ein teilgeordneter Vektorraum M. Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß auf M eine von der Nullform verschiedene monotone Linearform existiert[2]).

2. Wieder sei M ein teilgeordneter Vektorraum, L ein Unterraum von M und F_0 eine Linearform auf L. Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß F_0 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden kann[3]).

Wenn im Falle der zweiten Fragestellung die Linearform F_0 monoton und linear auf M fortgesetzt werden kann, so braucht diese Fortsetzung nicht eindeutig bestimmt zu sein. Ist also y ein Element von M, das nicht zu L gehört, so gibt es möglicherweise monotone und lineare Fortsetzungen F_1 und F_2 von F_0 auf M, für die $F_1(y) \neq F_2(y)$ ist. Es stellt sich demnach die Frage nach der Menge aller Werte $F(y)$, wo F alle monotonen und linearen Fortsetzungen von F_0 auf M durchläuft. Sie wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit in allgemeiner Form behandelt, wo (Sätze 18 und 19) gezeigt wird, daß zu jedem $y \in M$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall $I(y)$ auf der reellen Zahlengeraden existiert (das auch aus einem einzigen Punkt bestehen oder leer sein kann), so daß

a) für jede monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M $F(y) \in I(y)$ ist und

b) zu jeder reellen Zahl $\eta \in I(y)$ eine monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M existiert, für die $F(y) = \eta$ ist. Die Grenzen von $I(y)$ werden bestimmt.

Von besonderem Interesse sind die Elemente $y \in M$, für die $I(y)$ aus einem einzigen Punkt $\eta(y)$ besteht. Es gilt dann $F(y) = \eta(y)$ für jede monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M. Wir zeigen, daß die Elemente y mit dieser Eigenschaft einen Zwischenraum von L und M bilden, auf dem $F(y) = \eta(y)$ eine monotone Linearform ist, die F_0 fortsetzt (Satz 20).

Mit dem vorhergehenden verwandt ist das im dritten Teil behandelte Problem, das vor allem für die von H. Hadwiger begründete *axiomatische*

[1]) [8].
[2]) [8], Hauptsatz 6.
[3]) [8], Hauptsatz 5.

Integrationstheorie[4]) von Bedeutung ist. Hier wird ein teilgeordneter Vektorraum $\{L, y\}$ zugrunde gelegt, der aus seinem Unterraum L durch Adjunktion eines einzigen Elementes y hervorgeht. Ist F_0 eine monotone Linearform auf L, die auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann, so gehört zu y ein (eigentliches oder uneigentliches) reelles Intervall $J(y)$ (das eventuell nur aus einem Punkt besteht) mit der folgenden Bedeutung: Die auf $\{L, y\}$ definierte, F_0 fortsetzende Linearform

$$F(x + \tau y) = F_0(x) + \tau\eta \qquad (x \in L)$$

ist dann und nur dann monoton, wenn $\eta \in J(y)$ ist. Die Grenzen von $J(y)$ werden bestimmt[5]). Besteht $J(y)$ aus einer einzigen reellen Zahl $\eta(y)$, so kann also F_0 auf genau eine Weise monoton und linear auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden. Wir nennen in diesem Fall y *„über (L, F_0) eindeutig bewertet"*.

Wiederum sei nun M ein teilgeordneter Vektorraum, L ein Unterraum von M und F_0 eine monotone Linearform auf L. Man kann nun nach den Elementen $y \in M$ fragen, die über (L, F_0) eindeutig bewertet sind. Es sind dies offenbar diejenigen Elemente $y \in M$, zu denen eine reelle Zahl $\eta(y)$ mit folgender Eigenschaft existiert: Eine lineare Fortsetzung F von F_0 auf $\{L, y\}$ ist dann und nur dann monoton, wenn $F(y) = \eta(y)$ ist. [Es ist dann auch $F(y) = \eta(y)$ für jede lineare und monotone Fortsetzung F von F_0 auf irgendeinen Zwischenraum von $\{L, y\}$ und M.] Es wird nun gezeigt:

1. Die in M gelegenen, über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente bilden einen Zwischenraum $L^\times(F_0)$, $L \subset L^\times(F_0) \subset M$, auf dem $F(y) = \eta(y)$ eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 ist (Satz 36). Wir nennen $L^\times(F_0)$ die *eindeutig bewertete Hülle von (L, F_0) in M*.

2. Der Übergang von L zu $L^\times(F_0)$ ist eine *Abschließungsoperation* (Satz 37). Das bedeutet insbesondere: Ist ein Element $z \in M$ über $(L^\times(F_0), F)$[6]) eindeutig bewertet, so ist es schon über (L, F_0) eindeutig bewertet.

Diese Resultate sind für die axiomatische Integrationstheorie von besonderer Bedeutung. Um diese Theorie von unserem Standpunkt aus erfassen zu können, muß auf M eine Gruppe Γ von linearen Transformationen eingeführt werden. Ein Integral ist dann eine monotone Linearform, die gegenüber Γ invariant ist[7]). Naturgemäß ist hier $\{L, y\}$ zu ersetzen durch den kleinsten Unterraum $\{L, y\}^*$ von M, der L und y enthält und gegenüber Γ invariant ist. Ist nun F_0 ein Integral auf L, so wird man y *„eindeutig integrierbar über (L, F_0)"* nennen, wenn F_0 auf genau eine Weise zu einem Integral auf $\{L, y\}^*$ fortgesetzt werden kann.

Ist L das sog. elementare Integralfeld und F_0 das elementare Integral[8]), so sind die über (L, F_0) eindeutig integrierbaren Funktionen die *„absolut integrierbaren"* Funktionen[9]), denen in jedem Integrationssystem, in dem sie

[4]) Vgl. [2] bis [6].
[5]) Vgl. Sätze 21 und 22.
[6]) F ist die eindeutig bestimmte monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf $L^\times(F_0)$.
[7]) Vgl. etwa [3], § 3, oder [5], S. 307.
[8]) Vgl. [5], Definition 4.
[9]) Vgl. [5], S. 310ff.

integrierbar sind, immer dasselbe Integral zukommt. Die absolut integrierbaren Funktionen bilden ein Integralfeld, auf dem (wie auch auf jedem seiner Unterfelder) genau ein Integral existiert[10]). Im Falle der invarianten Integration auf Gruppen enthält dieses Feld alle stark ergodischen, insbesondere also die fastperiodischen Funktionen und das eindeutig bestimmte Integral einer solchen Funktion ist ihr Mittelwert im Sinne von J. VON NEUMANN[11]). Handelt es sich insbesondere um die invariante Integration auf einer kompakten topologischen Gruppe, so sind z.B. die stetigen Funktionen ergodisch[12]), also absolut integrierbar.

2. Teil: Fortsetzung monotoner Linearformen

Es sei M ein *teilgeordneter Vektorraum über dem Körper R der reellen Zahlen*, d.h. ein Vektorraum über R, auf dem eine Relation $x \geqq y$ gegeben ist, die folgende Eigenschaften hat:

1. *Sie ist reflexiv:* $x \geqq x$ *für alle* $x \in M$.
2. *Sie ist transitiv: Aus* $x \geqq y$ *und* $y \geqq z$ *folgt* $x \geqq z$.
3. *Aus* $x \geqq y$ *und* $y \geqq x$ *folgt* $x = y$.
4. *Aus* $x \geqq y$ *folgt* $x + z \geqq y + z$ *für alle* $z \in M$.
5. *Aus* $x \geqq y$ *folgt* $\alpha x \geqq \alpha y$ *für alle reellen* $\alpha \geqq 0$.

Die Teilordnung von M ist eindeutig bestimmt durch die Menge P aller $x \in M$, die $\geqq 0$ sind. P ist ein konvexer Kegel, d.h. aus $x, y \in P$ folgt $\alpha x + \beta y \in P$ für beliebige reelle $\alpha, \beta \geqq 0$. Außerdem ist niemals $x \in P$ und $-x \in P$ außer für $x = 0$.

Einen konvexen Kegel in M, der die letzte Eigenschaft hat, nennen wir *Ordnungskegel*. Die Entsprechung zwischen den Ordnungskegeln in M und den Teilordnungen, durch die M ein teilgeordneter Vektorraum wird, ist eine umkehrbar eindeutige: Ist P^* ein Ordnungskegel und setzen wir $x \overset{*}{\geqq} y$ dann und nur dann, wenn $x - y \in P^*$ ist, so wird M durch diese Relation ein teilgeordneter Vektorraum.

Im folgenden werden wir mit P immer den Ordnungskegel der Teilordnung bezeichnen, die auf M zum vornherein gegeben ist. Weitere Ordnungskegel, die wir ebenfalls noch zu betrachten haben werden, werden wir durchwegs mit P^* bezeichnen.

Wie üblich bezeichnen wir eine Menge $K \subset M$ als konvex, wenn mit $x, y \in K$ auch $\alpha x + \beta y \in K$ ist, sofern $\alpha, \beta \geqq 0$ und $\alpha + \beta = 1$ ist. Unter den konvexen Mengen sind im folgenden diejenigen besonders wichtig, die im Sinne der nachstehenden Definition „vollständig" sind:

Definition 1. *Eine konvexe Menge $K \subset M$ heißt vollständig, wenn zu jedem Element $x \in M$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $\varepsilon x \in K$ ist.*

[10]) Dies soll in einer späteren Arbeit bewiesen werden.

[11]) Vgl. [5], Satz 4 (S. 315).

[12]) Vgl. z.B. die Darstellung bei L. PONTRJAGIN, Topological groups, § 25. S. 91—99. Princeton 1939.

Jede vollständige konvexe Menge enthält das Nullelement von M.

Ist P^* ein (von der gegebenen Teilordnung auf M unabhängiger) Ordnungskegel in M und $x_0 \in M$, so nennen wir P^* x_0-vollständig, wenn eine vollständige konvexe Menge $K \subset M$ existiert, so daß $x_0 + K \subset P^*$ [13]) ist.

Definition 2. *Ist L ein Unterraum von M, so heißt ein Ordnungskegel $P^* \subset M$ L-vollständig, wenn ein Element $x_0 \in L$ existiert, so daß P^* x_0-vollständig ist.*

Satz 1. *Ist P^* x_0-vollständig, so existiert zu jedem $z \in M$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $\pm \varepsilon z \in P^* - x_0$ sind.*

Der *Beweis* liegt auf der Hand.

Jeder Unterraum des teilgeordneten Vektorraumes M ist (durch die von M her induzierte Teilordnung) selber ein teilgeordneter Vektorraum. Eine reellwertige Linearform F_0 auf einem solchen Unterraum L nennen wir *monoton*, wenn aus $x \geq 0$ folgt $F_0(x) \geq 0$. Es ist dann allgemein $F_0(x) \geq F_0(y)$, wenn $x \geq y$ ist.

Definition 3. *Eine auf einem Unterraum L des teilgeordneten Vektorraumes M definierte Linearform F_0 heißt M-monoton, wenn eine vollständige konvexe Menge $K_0 \subset M$ existiert, so daß für jedes $y \in M$ die Funktion F_0 auf der Menge $L \cap (y + K_0 + P)$ nach unten beschränkt ist* [14]).

Die M-monotonen Linearformen auf L können auch dadurch charakterisiert werden, daß sie für jedes $y \in M$ auf $L \cap (y - K_0 - P)$ nach oben beschränkt sind.

Jede M-monotone Linearform auf L ist insbesondere monoton [15]); die M-Monotonie ist notwendig und hinreichend dafür, daß F_0 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden kann [16]).

Satz 2. *Zu jeder M-monotonen Linearform F_0 auf einem Unterraum $L \subset M$ existiert ein L-vollständiger Ordnungskegel $P^* \supset P$ in M, so daß aus $x \in L \cap P^*$ folgt $F_0(x) \geq 0$.*

[Anders ausgedrückt: Neben der gegebenen Teilordnung „$\geq$" auf M existiert noch eine schwächere „$\overset{*}{\geq}$" (d.h. aus $x \geq y$ folgt $x \overset{*}{\geq} y$), deren Ordnungskegel P^* L-vollständig ist, und in bezug auf die F_0 noch monoton ist.]

Der Beweis dieses Satzes befindet sich in [8] (Satz 4).

Da jede auf M definierte monotone Linearform auch M-monoton ist [17]), gilt die Aussage von Satz 2 insbesondere für alle monotonen Linearformen auf M.

Im folgenden sei nun F_0 eine ein für allemal feste M-monotone Linearform auf dem ebenfalls ein für allemal festen Unterraum $L \subset M$. *Ihr ordnen wir die Menge $\mathfrak{Q}$ von Ordnungskegeln $P^* \subset M$ zu, die folgende Eigenschaften haben:*

[13]) $x_0 + K$ bedeutet die Menge aller Elemente $x_0 + k \in M$, wo $k \in K$ ist. Allgemeiner werden wir, wenn A, B zwei Untermengen von M und α, β reelle Zahlen sind, mit $\alpha A + \beta B$ die Menge aller $\alpha a + \beta b$ bezeichnen, wo $a \in A$ und $b \in B$ ist.

[14]) Diese Definition ist schon in [8] (Definition 2) ausgesprochen.

[15]) [8], Satz 3 (Korollar).

[16]) [8], Hauptsatz 5.

[17]) [8], Satz 2.

1. $P^* \supset P$.

2. *P^* ist L-vollständig.*

3. *Aus $x \in L \cap P^*$ folgt $F_0(x) \geqq 0$ (d.h. F_0 ist monoton in bezug auf die durch P^* gegebene Teilordnung in M).*

Nach Satz 2 ist Q *nicht leer.*

Definition 4. *Für jeden Ordnungskegel $P^* \in Q$ und jedes $y \in M$ bezeichnen wir mit $\bar{R}(y, P^*)$ die Menge reeller Zahlen $\bar{R}(y, P^*) = F_0(L \cap (y + P^*)) + P$. Ebenso setzen wir $\underline{R}(y, P^*) = F_0(L \cap (y - P^*)) - P$.*

Dabei bedeutet P die Menge aller reellen Zahlen $\geqq 0$. Es ist also beispielsweise $\bar{R}(y, P^*)$ die Menge aller reellen Zahlen ϱ, zu denen ein Element $x \in L$ gehört, das $\overset{*}{\geqq} y$[18]) ist und für das $F_0(x) \leqq \varrho$ ist.

Satz 3. *Für beliebiges $y \in M$ und einen beliebigen Ordnungskegel $P^* \in Q$ ist weder $\bar{R}(y, P^*)$ noch $\underline{R}(y, P^*)$ leer. Die erste dieser reellen Zahlenmengen ist nach unten, die zweite nach oben beschränkt.*

Beweis. 1. Da P^* L-vollständig ist, existiert $x_0 \in L$, so daß P^* x_0-vollständig ist. Nach Satz 1 existiert also ein reelles $\varepsilon > 0$, so daß $-\varepsilon y \in P^* - x_0$ ist. Das bedeutet $\frac{1}{\varepsilon} x_0 \in y + P^*$. Da aber $\frac{1}{\varepsilon} x_0 \in L$ ist, ist also $L \cap (y + P^*)$ und damit $\bar{R}(y, P^*)$ nicht leer.

2. Sei $\varrho \in \bar{R}(y, P^*)$. Dann existiert $x \in L$, so daß $x \in y + P^*$ und $\varrho \geqq F_0(x)$ ist. Wegen Eigenschaft 2. von Q existiert nach Satz 1 ein reelles $\varepsilon > 0$, so daß $\varepsilon y \in P^* - x_0$ ist. Es ist also $x \in y + P^* \subset P^* - \frac{1}{\varepsilon} x_0$, d.h. (Eigenschaft 3). von Q) $F_0(x) \geqq -\frac{1}{\varepsilon} F_0(x_0)$. Also ist $\bar{R}(y, P^*)$ nach unten beschränkt.

Die $\underline{R}(y, P^*)$ betreffenden Aussagen des Satzes werden analog bewiesen.

Satz 4. *Es gelten die Beziehungen:*

(1a) $\bar{R}(y_1 + y_2, P^*) \supset \bar{R}(y_1, P^*) + \bar{R}(y_2, P^*)$,

(1b) $\underline{R}(y_1 + y_2, P^*) \supset \underline{R}(y_1, P^*) + \underline{R}(y_2, P^*)$,

(2) $\bar{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \bar{R}(y, P^*)$, $\underline{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{R}(y, P^*)$, *falls* $\alpha > 0$,

(3) $\bar{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{R}(y, P^*)$, $\underline{R}(\alpha y, P^*) = \alpha \bar{R}(y, P^*)$, *falls* $\alpha < 0$ *ist.*

Beweis. 1. Sei $\varrho_i \in \bar{R}(y_i, P^*)$ $(i = 1, 2)$. Dann existiert $x_i \in L \cap (y + P^*)$, so daß $F_0(x_i) \leqq \varrho_i$ $(i = 1, 2)$ ist. Es folgt $x_1 + x_2 \in L \cap (y_1 + y_2 + P^*)$ und $F_0(x_1 + x_2) \leqq \varrho_1 + \varrho_2$. Also ist $\varrho_1 + \varrho_2 \in \bar{R}(y_1 + y_2, P^*)$ und daraus folgt (1a). (1b) wird auf analoge Weise bewiesen.

2. Um die erste Beziehung von (2) zu beweisen, gehen wir aus von einer reellen Zahl $\varrho \in \bar{R}(y, P^*)$. Es existiert

$$x \in L \cap (y + P^*), \tag{4}$$

so daß $F_0(x) \leqq \varrho$ ist. Das bedeutet aber, falls $\alpha > 0$ ist, $\alpha x \in L \cap (\alpha y + P^*)$ und $F_0(\alpha x) \leqq \alpha \varrho$, d.h. $\alpha \varrho \in \bar{R}(\alpha y, P^*)$. Damit ist $\alpha \bar{R}(y, P^*) \subset \bar{R}(\alpha y, P^*)$.

[18]) Mit $\overset{*}{\geqq}$ ist die durch den Ordnungskegel P^* in M definierte Teilordnung bezeichnet.

Ersetzt man hier α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so erhält man $\overline{R}(\alpha y, P^*) \subset \alpha R(y, P^*)$, womit die erste Beziehung von (2) bewiesen ist. Die zweite wird analog bewiesen.

3. Ist $\alpha < 0$, so folgt aus (4)

$$\alpha x \in L \cap (\alpha y - P^*) \quad \text{und} \quad F_0(\alpha x) \geq \alpha \varrho .$$

Also ist $\alpha \varrho \in \underline{R}(\alpha y, P^*)$. Das bedeutet, daß

$$\alpha \overline{R}(y, P^*) \subset \underline{R}(\alpha y, P^*) \tag{5}$$

ist. Ersetzt man wiederum α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so folgt

$$\alpha \underline{R}(y, P^*) \supset \overline{R}(\alpha y, P^*) . \tag{6}$$

Auf entsprechende Weise beweist man die Beziehungen, die aus (5) und (6) durch Vertauschung der oberen Querstriche mit unteren (und umgekehrt) hervorgehen, und damit (3).

Definition 5. *Für jedes $y \in M$ und jeden Ordnungskegel $P^* \in \mathfrak{Q}$ setzen wir*

$$\overline{p}(y, P^*) = \inf \overline{R}(y, P^*) \quad \textit{und} \quad \underline{p}(y, P^*) = \sup \underline{R}(y, P^*) .$$

Nach Satz 3 existieren diese Größen.

Satz 5. *Es gelten die Beziehungen*

$$\overline{p}(y_1 + y_2, P^*) \leq \overline{p}(y_1, P^*) + \overline{p}(y_2, P^*),$$
$$\underline{p}(y_1 + y_2, P^*) \geq \underline{p}(y_1, P^*) + \underline{p}(y_2, P^*),$$
$$\overline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \overline{p}(y, P^*) \quad \textit{und} \quad \underline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{p}(y, P^*), \quad \textit{falls } \alpha > 0 \textit{ ist},$$
$$\overline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \underline{p}(y, P^*) \quad \textit{und} \quad \underline{p}(\alpha y, P^*) = \alpha \overline{p}(y, P^*), \quad \textit{falls } \alpha < 0 \textit{ ist}.$$

Insbesondere ist also $\overline{p}(y, P^*) = -\underline{p}(-y, P^*)$ und $\underline{p}(y, P^*) = -\overline{p}(-y, P^*)$

Beweis. Satz 4 und Definition 5.

Satz 6. *Es ist $\overline{p}(0, P^*) = \underline{p}(0, P^*) = 0$ für alle $P^* \in \mathfrak{Q}$.*

Beweis. Wegen $0 \in L \cap (0 + P^*)$ ist $0 = F_0(0) \in \overline{R}(0, P^*)$, d.h. $\overline{p}(0, P^*) \leq 0$.

Ist anderseits $\varrho \in \overline{R}(0, P^*)$, so existiert $x \in L \cap (0 + P^*)$, so daß $F_0(x) \leq \varrho$ ist. Nach Eigenschaft 3. von $\mathfrak{Q}$ ist dann $F_0(x) \geq 0$, also auch $\varrho \geq 0$. Somit ist $\overline{p}(0, P^*) \geq 0$ und die $\overline{p}$ betreffende Behauptung ist bewiesen. $\underline{p}(0, P^*) = 0$ wird auf analoge Weise nachgewiesen.

Satz 7. *$\overline{p}(y, P^*)$ und $\underline{p}(y, P^*)$ sind für jedes $P^* \in \mathfrak{Q}$ monotone Funktionen auf M; d.h. es ist $\overline{p}(y_1, P^*) \geq \overline{p}(y_2, P^*)$ und $\underline{p}(y_1, P^*) \geq \underline{p}(y_2, P^*)$, falls $y_1 \geq y_2$ ist.*

Beweis. Aus $y_1 \geq y_2$ folgt wegen $P^* \supset P$, daß $y_1 + P^* \subset y_2 + P^*$ ist. Also ist auch $L \cap (y_1 + P^*) \subset L \cap (y_2 + P^*)$ und damit $\overline{R}(y_1, P^*) \subset \overline{R}(y_2, P^*)$, woraus die $\overline{p}$ betreffende Behauptung unmittelbar folgt. Die zweite Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 8. *Für beliebige $y \in M$ und $P^* \in \mathfrak{Q}$ ist $\overline{p}(y, P^*) \geq \underline{p}(y, P^*)$.*

Beweis. Mit Hilfe der Sätze 5 und 6 folgt

$$\overline{p}(y, P^*) + \overline{p}(-y, P^*) \geq \overline{p}(0, P^*) = 0,$$

also

$$\overline{p}(y, P^*) \geq -\overline{p}(-y, P^*) = \underline{p}(y, P^*).$$

Satz 9. *Ist $y \in L$, so gilt bei beliebigem $P^* \in Q$: $\overline{p}(y, P^*) = \underline{p}(y, P^*) = F_0(y)$.*

Beweis. Wegen $0 \in P^*$ ist $y \in L \cap (y \pm P^*)$, d.h. $F_0(y) \in \overline{R}(y, P^*)$ und $F_0(y) \in \underline{R}(y, P^*)$. Also ist $\overline{p}(y, P^*) \leq F_0(y)$ und $\underline{p}(y, P^*) \geq F_0(y)$. Daraus und aus Satz 8 folgt die Behauptung.

Satz 10. *Jede M-monotone Linearform auf L kann zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden.*

Beweis. Aus den Sätzen 5 und 9 folgt mit Hilfe eines Satzes von BANACH[19]), daß für jedes $P^* \in Q$ die Linearform F_0 auf L zu einer Linearform F auf M fortgesetzt werden kann, so daß für alle $y \in M$

$$F(y) \leq \overline{p}(y, P^*) \tag{7}$$

ist. Es bleibt zu zeigen, daß F monoton ist. Nun folgt aus (7) mit Hilfe von Satz 5: $F(y) = -F(-y) \geq -\overline{p}(-y, P^*) = \underline{p}(y, P^*)$ und daraus mit Hilfe der Sätze 6 und 7 für $y \geq 0$: $F(y) \geq \underline{p}(y, P^*) \geq \underline{p}(0, P^*) = 0$.

Satz 11. *Ist $P^* \in Q$, $y_0 \in M$ und $\underline{p}(y_0, P^*) \leq \eta \leq \overline{p}(y_0, P^*)$, so existiert eine monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M, so daß $F(y_0) = \eta$ ist.*

Beweis. a) Auf dem durch L und y_0 erzeugten Unterraum $\{L, y_0\} \subset M$ ist durch $F_1(x + \tau y_0) = F_0(x) + \tau\eta$ $(x \in L)$ eine Linearform F_1 definiert, von der wir vorerst beweisen, daß sie in bezug auf die durch den Ordnungskegel P^* bestimmte Teilordnung auf M monoton ist. Dazu ist für $\tau \neq 0$ zu zeigen, daß

$$\text{aus} \quad x + \tau y_0 \in P^* \quad \text{folgt} \quad F_0(x) + \tau\eta \geq 0. \tag{8}$$

Die Voraussetzung von (8) bedeutet aber $x \in L \cap (-\tau y_0 + P^*)$, also

$$F_0(x) \in \overline{R}(-\tau y_0, P^*)$$

und somit $F_0(x) \geq \overline{p}(-\tau y_0, P^*)$. Sei nun

aa) $\tau > 0$. Nach Satz 5 folgt $F_0(x) \geq -\tau \underline{p}(y_0, P^*) \geq -\tau\eta$, also (8).

bb) $\tau < 0$. Es folgt $F_0(x) \geq -\tau \overline{p}(y_0, P^*) \geq -\tau\eta$, also wieder (8).

b) Ich behaupte nun weiter, daß F_1 auf $\{L, y_0\}$ M-monoton ist.

Da P^* L-vollständig ist (Eigenschaft 2. von Q), existieren nach Definition 2 ein Element $x_0 \in L$ und eine vollständige konvexe Menge $K \subset M$, so daß $x_0 + K \subset P^*$ ist. Nach Definition 3 genügt es nun zu zeigen, daß F_1 für jedes $z \in M$ auf $\{L, y_0\} \cap (z + x_0 + K + P)$ nach unten beschränkt ist.

Sei also $x + \tau y_0 \in z + x_0 + K + P \subset z + P^*$. Nach Satz 1 existiert eine (von x und τ unabhängige) reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß $\varepsilon z \in P^* - x_0$ ist. Es folgt $x + \tau y_0 \in P^* - \frac{1}{\varepsilon} x_0$, also nach a) $F_1(x + \tau y_0) \geq -\frac{1}{\varepsilon} F_0(x_0)$.

[19]) [1], S. 27, Théorème 1.

c) Nach Satz 10 kann F_1 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden.

Definition 6. *Für jedes $y \in M$ setzen wir (sofern diese Größen existieren):*

$$\overline{p}(y) = \sup \overline{p}(y, P^*), \quad \underline{p}(y) = \inf \underline{p}(y, P^*),$$

wo sich die Bildung des Infimums und des Supremums auf alle $P^* \in Q$ bezieht.

Folgende Definition wäre gleichbedeutend mit der vorhergehenden:

$$\overline{p}(y) = \inf \bigcap_{P^*} \overline{R}(y, P^*) = \inf \bigcap_{P^*} [F_0(L \cap (y + P^*)) + P]$$

$$\underline{p}(y) = \sup \bigcap_{P^*} \underline{R}(y, P^*) = \sup \bigcap_{P^*} [F_0(L \cap (y - P^*)) - P],$$

wo sich wiederum die Bildung der Durchschnitte auf alle $P^* \in Q$ bezieht.

Satz 12. *Die Definitionsbereiche $\overline{C}$ und $\underline{C}$ von $\overline{p}(y)$ und $\underline{p}(y)$ sind konvexe Kegel und es ist $\overline{C} = -\underline{C}$.*

Beweis. Nach Satz 4 ist, falls $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ sind,

$$\bigcap_{P^*} \overline{R}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, P^*) > \alpha_1 \bigcap_{P^*} \overline{R}(y_1, P^*) + \alpha_2 \bigcap_{P^*} \overline{R}(y_2, P^*)$$

und

$$\bigcap_{P^*} \overline{R}(-y, P^*) = -\bigcap_{P^*} \underline{R}(y, P^*).$$

Schließlich ist $0 \in \overline{C}$ und $0 \in \underline{C}$ nach Satz 6.

Satz 13. *Wenn $\overline{p}(y_1)$ und $\overline{p}(y_2)$ existieren, so ist*

$$\overline{p}(y_1 + y_2) \leq \overline{p}(y_1) + \overline{p}(y_2).$$

Existieren $\underline{p}(y_1)$ und $\underline{p}(y_2)$, so ist $\underline{p}(y_1 + y_2) \geq \underline{p}(y_1) + \underline{p}(y_2)$.

Der *Beweis* ist im Beweis zu Satz 12 (für $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) enthalten.

Satz 14. *Existiert $\overline{p}(y)$ bzw. $\underline{p}(y)$ und ist*

$\alpha > 0$, so existiert auch $\overline{p}(\alpha y)$ bzw. $\underline{p}(\alpha y)$ und es ist

$$\overline{p}(\alpha y) = \alpha \overline{p}(y), \quad \underline{p}(\alpha y) = \alpha \underline{p}(y),$$

$\alpha < 0$, so existiert auch $\underline{p}(\alpha y)$ bzw. $\overline{p}(\alpha y)$ und es ist

$$\underline{p}(\alpha y) = \alpha \overline{p}(y), \quad \overline{p}(\alpha y) = \alpha \underline{p}(y).$$

Beweis. Satz 4 und Definition 6.

Satz 15. $\overline{p}(0) = \underline{p}(0) = 0$.

Der *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 6.

Satz 16. *Es ist $\overline{p}(y) \geq \underline{p}(y)$, falls beide Größen existieren.*

Beweis. Satz 8.

Satz 17. *Ist $y \in L$, so ist $\overline{p}(y) = \underline{p}(y) = F_0(y)$.*

Beweis. Satz 9.

Hauptsatz 18. *Ist F eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf M, so ist für alle $y \in M$*

$$\underline{p}(y) \leq F(y) \leq \overline{p}(y),$$

soweit die auftretenden Größen existieren.

Beweis. Da F auf M M-monoton ist[20]), existiert nach Satz 2 ein Ordnungskegel $P_0^* \in Q$, so daß F in bezug auf die von P_0^* erzeugte Teilordnung in M monoton ist. Aus $x \in L \frown (y + P_0^*)$ (bzw. $x \in L \frown (y - P^*)$) folgt dann $F_0(x) = F(x) \geqq F(y)$ (bzw. $F_0(x) = F(x) \leqq F(y)$). Also ist $\underline{p}(y, P_0^*) \leqq F(y) \leqq \overline{p}(y, P_0^*)$ und daraus folgt Satz 18 unmittelbar.

Hauptsatz 19. *Sind für ein Element $y_0 \in M$ und eine reelle Zahl η die beiden Bedingungen*

$$\underline{p}(y_0) < \eta < \overline{p}(y_0) \tag{9}$$

erfüllt, soweit die auftretenden Größen existieren, so gibt es eine monotone und lineare Fortsetzung F von F_0 auf M, für die $F(y_0) = \eta$ ist.

Beweis. Aus (9) und Definition 6 folgt, daß ein Ordnungskegel $P_0^* \in Q$ existiert, so daß $\underline{p}(y_0, P_0^*) \leqq \eta \leqq \overline{p}(y_0, P_0^*)$ ist. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 11.

Hauptsatz 20. *Die Menge N aller Elemente $y \in M$, für die $\overline{p}(y)$ und $\underline{p}(y)$ existieren und einander gleich sind, ist ein Zwischenraum von L und M. Auf N ist durch $F(y) = \underline{p}(y)$ eine monotone Linearform definiert, die Fortsetzung von F_0 ist. Für ein Element $z \in M$ ist dann und nur dann $F_1(z) = F_2(z)$ für zwei beliebige lineare und monotone Fortsetzungen F_1 und F_2 von F_0 auf M, wenn $z \in N$ ist*[21]).

Beweis. 1. Aus $\overline{p}(y_i) = \underline{p}(y_i)$ und $\alpha_i \geqq 0$ $(i = 1, 2)$ folgt nach den Sätzen 13 bis 16, daß $\overline{p}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \underline{p}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ ist. Ferner folgt nach Satz 14 aus $\overline{p}(y) = \underline{p}(y)$: $\underline{p}(-y) = -\overline{p}(y) = -\underline{p}(y) = \overline{p}(-y)$. Also ist N ein Unterraum von M. Nach Satz 17 ist außerdem $L \subset N$.

2. Sind $y_1, y_2 \in N$, so ist nach Satz 13

$$\underline{p}(y_1 + y_2) \geqq \underline{p}(y_1) + \underline{p}(y_2) = \overline{p}(y_1) + \overline{p}(y_2) \geqq \overline{p}(y_1 + y_2).$$

Nach Satz 16 ist also $\underline{p}(y_1 + y_2) = \underline{p}(y_1) + \underline{p}(y_2)$.

Ist ferner $y \in N$, so gilt nach Satz 14 für $\alpha > 0$: $\underline{p}(\alpha y) = \alpha \underline{p}(y)$ und für $\alpha < 0$: $\underline{p}(\alpha y) = \alpha \overline{p}(y) = \alpha \underline{p}(y)$; schließlich ist $\underline{p}(0) = 0$ (Satz 15).

Damit ist gezeigt, daß $F(y) = \underline{p}(y)$ eine Linearform auf N ist. Daß F Fortsetzung von F_0 ist, folgt aus Satz 17 und schließlich folgt die Monotonie von F aus Satz 7 und Definition 6.

3. Die letzte Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus den Sätzen 18 und 19.

3. Teil: Eindeutig bewertete Elemente

Es sei $\{L, y\}$ ein teilgeordneter Vektorraum, der aus seiner Hyperebene L durch Adjunktion des Elementes y hervorgeht. F_0 sei eine monotone Linearform auf L. Wir wollen vorerst ein Kriterium dafür finden, daß F_0 auf genau eine Weise zu einer monotonen Linearform auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann,

[20]) [8], Satz 2.

[21]) Für den speziellen Fall, daß M e-beschränkt ist, wurde dieser Satz schon von Kirsch bewiesen. Vgl. dazu [3], § 6 (S. 355ff.).

oder, wie wir sagen werden (Definition 9), daß y über (L, F_0) eindeutig bewertet ist.

P bedeutet im folgenden den Ordnungskegel von $\{L, y\}$.

Definition 7. *Wir setzen*

$$\overline{S}(y) = F_0\big(L \cap (y + P)\big) + \mathrm{P}$$
$$\underline{S}(y) = F_0\big(L \cap (y - P)\big) - \mathrm{P}$$

(P bedeutet wieder die Menge aller reellen Zahlen $\geqq 0$). $\overline{S}(y)$ bzw. $\underline{S}(y)$ kann leer sein, nämlich dann, wenn $L \cap (y+P)$ bzw. $\big(L \cap (y-P)\big)$ leer ist.

Definition 8. *Wir setzen*

$$\overline{q}(y) = \inf \overline{S}(y), \quad \underline{q}(y) = \sup \underline{S}(y),$$

falls diese Größen existieren.

[Beispielsweise existiert $\overline{q}(y)$, wenn $\overline{S}(y)$ nicht leer und nach unten beschränkt ist.]

Satz 21. *Wenn F_0 zu einer monotonen Linearform F auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann, so ist $\underline{q}(y) \leqq F(y) \leqq \overline{q}(y)$, soweit diese Größen existieren.*

Beweis. Aus $x \in L \cap (y+P)$ folgt $F_0(x) = F(x) \geqq F(y)$. Also ist $F(y) \leqq \varrho$ für jedes $\varrho \in \overline{S}(y)$, d.h. $F(y) \leqq \overline{q}(y)$. Die $\underline{q}(y)$ betreffende Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 22. *η sei eine reelle Zahl, für die $\underline{q}(y) \leqq \eta \leqq \overline{q}(y)$ ist, soweit die auftretenden Größen existieren. Dann ist $F(x+\tau y) = F_0(x) + \tau\eta$ $(x \in L)$ eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf $\{L, y\}$.*

Beweis. Durch $F(x+\tau y) = F_0(x) + \tau\eta$ ist auf $\{L, y\}$ eine Linearform definiert, welche F_0 fortsetzt. Es bleibt zu beweisen, daß aus $x + \tau y \geqq 0$ folgt $F(x+\tau y) \geqq 0$. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:

a) $\tau = 0$. In diesem Fall ist nichts zu beweisen, da F_0 auf L monoton ist.

b) $\tau > 0$. Es folgt $-\frac{1}{\tau} x \leqq y$, d.h. $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \in \underline{S}(y)$, also $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \leqq \underline{q}(y) \leqq \eta$ und $F(x+\tau y) = F_0(x) + \tau\eta \geqq 0$.

c) $\tau < 0$. Es folgt $-\frac{1}{\tau} x \geqq y$, d.h. $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \in \overline{S}(y)$, also $-\frac{1}{\tau} F_0(x) \geqq \overline{q}(y) \geqq \eta$ und $F(x+\tau y) = F_0(x) + \tau\eta \geqq 0$.

Definition 9. *Wir nennen y über (L, F_0) eindeutig bewertet, wenn F_0 auf genau eine Weise zu einer monotonen Linearform auf $\{L, y\}$ fortgesetzt werden kann.*

Satz 23. *Dann und nur dann ist y über (L, F_0) eindeutig bewertet, wenn $\overline{q}(y)$ und $\underline{q}(y)$ beide existieren und einander gleich sind*[22]).

Beweis. Sätze 21 und 22.

[22]) Vgl. dazu den in [5], Abschnitt V mit anderen Mitteln behandelten Spezialfall der absolut integrierbaren Funktionen.

Das weitere Ziel besteht nun im Nachweis, daß die über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente, die in einem Oberraum $M \supset L$ enthalten sind, einen Zwischenraum von L und M bilden, auf dem (wie auch auf jedem in ihm enthaltenen Zwischenraum) genau eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0 existiert. Es bedeutet also im folgenden M einen teilgeordneten Vektorraum, L einen Unterraum von M und F_0 eine monotone Linearform auf L. Für jedes Element $y \in M$ kann dann der von L und y erzeugte Vektorraum $\{L, y\} < M$ gebildet werden, in welchem man die bisher gemachten Überlegungen des dritten Teiles durchführen kann. Dabei kann durchwegs der Ordnungskegel von $\{L, y\}$ durch denjenigen von M ersetzt werden. Der Letztere ist deshalb im folgenden mit P bezeichnet.

Satz 24. *Für beliebige* $y_1, y_2 \in M$ *ist*

$$\overline{S}(y_1 + y_2) > \overline{S}(y_1) + \overline{S}(y_2) \quad \textit{und} \quad \underline{S}(y_1 + y_2) > \underline{S}(y_1) + \underline{S}(y_2).$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der selbstverständlichen Beziehung $L \cap (y_1 + y_2 + P) \supset \big(L \cap (y_1 + P)\big) + \big(L \cap (y_2 + P)\big)$, die zweite wird analog bewiesen.

Satz 25. *Für* $\alpha > 0$ *ist* $\overline{S}(\alpha y) = \alpha \overline{S}(y)$ *und* $\underline{S}(\alpha y) = \alpha \underline{S}(y)$. *Für* $\alpha < 0$ *ist* $\overline{S}(\alpha y) = \alpha \underline{S}(y)$ *und* $\underline{S}(\alpha y) = \alpha \overline{S}(y)$.

Beweis. Um die erste der Beziehungen zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für $\alpha > 0$ $\alpha\big(L \cap (y + P)\big) = L \cap (\alpha y + P)$ ist. Nun folgt aus $x \in L \cap (y + P)$ ohne weiteres $\alpha x \in L \cap (\alpha y + P)$, d.h. es ist $\alpha\big(L \cap (y + P)\big) < L \cap (\alpha y + P)$. Ersetzt man hier α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so folgt

$$L \cap (\alpha y + P) < \alpha\big(L \cap (y + P)\big),$$

womit die erste Beziehung des Satzes bewiesen ist. Der Nachweis für die zweite wird analog erbracht.

Ist nun $\alpha < 0$, so folgt aus $x \in L \cap (y + P)$, daß $\alpha x \in L \cap (\alpha y - P)$ ist. Also ist $\alpha\big(L \cap (y + P)\big) < L \cap (\alpha y - P)$. Ebenso folgt $\alpha\big(L \cap (y - P)\big) < L \cap (\alpha y + P)$. Ersetzt man wieder α durch $1/\alpha$ und y durch αy, so erhält man

$$L \cap (\alpha y + P) < \alpha\big(L \cap (y - P)\big)$$

und

$$L \cap (\alpha y - P) < \alpha\big(L \cap (y + P)\big).$$

Daraus folgt nun

$$L \cap (\alpha y \pm P) = \alpha\big(L \cap (y \mp P)\big)$$

und damit die beiden letzten Beziehungen des Satzes.

Satz 26. *Es ist* $\overline{S}(0) = \mathrm{P}$ *und* $\underline{S}(0) = -\mathrm{P}$.

Beweis. Aus $x \in L \cap (0 + P)$ folgt $F_0(x) \geqq 0$, also ist $\overline{S}(0) < \mathrm{P}$. Anderseits ist $0 \in L \cap (0 + P)$, d.h. $0 = F_0(0) \in \overline{S}(0)$, also $\overline{S}(0) > \mathrm{P}$. Die $\underline{S}(0)$ betreffende Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 27. *Aus* $\bar{\varrho} \in \overline{S}(y)$, $\underline{\varrho} \in \underline{S}(y)$ *folgt* $\bar{\varrho} \geqq \underline{\varrho}$.

Beweis. Wegen der Monotonie von F_0 genügt es, zu zeigen, daß aus $\bar{x} \in L \cap (y + P)$, $\underline{x} \in L \cap (y - P)$ folgt $\bar{x} \geqq \underline{x}$. Das ist aber trivial.

Satz 28. *Aus* $y_1 \geqq y_2$ *folgt* $\overline{S}(y_1) < \overline{S}(y_2)$ *und* $\underline{S}(y_1) > \underline{S}(y_2)$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $L \cap (y_1 + P) < L \cap (y_2 + P)$ und $L \cap (y_1 - P) > L \cap (y_2 - P)$, woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

Satz 29. *Wenn* $\overline{q}(y_1)$, $\overline{q}(y_2)$ *und* $\overline{q}(y_1 + y_2)$ *existieren, so ist*

$$\overline{q}(y_1 + y_2) \leqq \overline{q}(y_1) + \overline{q}(y_2).$$

Im gleichen Sinne ist

$$\underline{q}(y_1 + y_2) \geqq \underline{q}(y_1) + \underline{q}(y_2).$$

Beweis. Satz 24.

Satz 30. *Wenn* $\overline{q}(y)$ *existiert und*

$\alpha > 0$ *ist, so existiert auch* $\overline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\overline{q}(\alpha y) = \alpha \overline{q}(y)$,

$\alpha < 0$ *ist, so existiert auch* $\underline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\underline{q}(\alpha y) = \alpha \overline{q}(y)$.

Wenn $\underline{q}(y)$ *existiert und*

$\alpha > 0$ *ist, so existiert auch* $\underline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\underline{q}(\alpha y) = \alpha \underline{q}(y)$,

$\alpha < 0$ *ist, so existiert auch* $\overline{q}(\alpha y)$ *und es ist* $\overline{q}(\alpha y) = \alpha \underline{q}(y)$.

Beweis. Satz 25.

Satz 31. *Es ist* $\overline{q}(0) = \underline{q}(0) = 0$.

Beweis. Satz 26.

Satz 32. *Falls* $\overline{q}(y)$ *und* $\underline{q}(y)$ *existieren, so ist* $\overline{q}(y) \geqq \underline{q}(y)$.

Beweis. Satz 27.

Satz 33. $\overline{q}(y)$ *und* $\underline{q}(y)$ *sind monotone Funktionen; d.h. aus* $y_1 \geqq y_2$ *folgt* $\overline{q}(y_1) \geqq \overline{q}(y_2)$ *und* $\underline{q}(y_1) \geqq \underline{q}(y_2)$, *soweit diese Größen existieren.*

Beweis. Satz 28.

Satz 34. *Für* $y \in L$ *ist* $\overline{q}(y) = \underline{q}(y) = F_0(y)$.

Beweis. Ist $x \in L \cap (y + P)$, so folgt wegen der Monotonie von F_0: $F_0(x) \geqq F_0(y)$; also ist $\overline{q}(y) \geqq F_0(y)$. Anderseits ist $y \in L \cap (y + P)$, also $\overline{q}(y) \leqq F_0(y)$. Die $\underline{q}(y)$ betreffende Behauptung wird analog bewiesen.

Hauptsatz 35. *Die Elemente* $y \in M$, *die über* (L, F_0) *eindeutig bewertet sind, bilden einen Zwischenraum* $L^{\times}(F_0)$ *von* L *und* M.

Beweis. Wir bezeichnen die Menge der in M enthaltenen, über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente mit N und zeigen:

1. Aus $y_1, y_2 \in N$ folgt $y_1 + y_2 \in N$. Da nämlich nach Satz 23 $\overline{q}(y_i)$ und $\underline{q}(y_i)$ $(i = 1, 2)$ existieren, ist keine der Mengen $\overline{S}(y_i)$ und $\underline{S}(y_i)$ $(i = 1, 2)$ leer. Also sind nach Satz 24 auch $\overline{S}(y_1 + y_2)$ und $\underline{S}(y_1 + y_2)$ nicht leer. Nach Satz 27 existieren $\overline{q}(y_1 + y_2)$ und $\underline{q}(y_1 + y_2)$ und es ist $\overline{q}(y_1 + y_2) \geqq \underline{q}(y_1 + y_2)$. Anderseits ist auf Grund der Sätze 23 und 29

$$\overline{q}(y_1 + y_2) \leqq \overline{q}(y_1) + \overline{q}(y_2) = \underline{q}(y_1) + \underline{q}(y_2) \leqq \underline{q}(y_1 + y_2).$$

Also ist $\overline{q}(y_1 + y_2) = \underline{q}(y_1 + y_2)$ d.h. $y_1 + y_2 \in N$ nach Satz 23.

2. Aus $y \in N$ folgt $\alpha y \in N$ für reelles α. Ist nämlich $y \in N$, so ist (Satz 23) $\overline{q}(y) = \underline{q}(y)$. Daraus folgt mit Hilfe von Satz 30 $\overline{q}(\alpha y) = \underline{q}(\alpha y)$, d.h. $\alpha y \in N$.

Daß schließlich $N > L$ ist, folgt aus Satz 34.

Definition 10. *Den Zwischenraum $L^{\times}(F_0)$ der über (L, F_0) eindeutig bewerteten Elemente nennen wir eindeutig bewertete Hülle von (L, F_0) in M.*

Hauptsatz 36. *Auf der eindeutig bewerteten Hülle $L^{\times}(F_0)$ von (L, F_0) in M ist $F(y) = \overline{q}(y) = \underline{q}(y)$ eine monotone und lineare Fortsetzung von F_0* [23].

Beweis. Daß F eine monotone Fortsetzung von F_0 auf $L^{\times}(F_0)$ ist, folgt aus den Sätzen 23, 33 und 34. Die Linearität wird wie folgt bewiesen:

a) Sind $y_1, y_2 \in L^{\times}(F_0)$, so ist (Satz 29)

$$\overline{q}(y_1 + y_2) \leq \overline{q}(y_1) + \overline{q}(y_2) = \underline{q}(y_1) + \underline{q}(y_2) \leq \underline{q}(y_1 + y_2).$$

Da aber nach Satz 35 $\overline{q}(y_1 + y_2) = \underline{q}(y_1 + y_2)$ ist, folgt

$$\overline{q}(y_1 + y_2) = \overline{q}(y_1) + \overline{q}(y_2).$$

b) Ist $y \in L^{\times}(F_0)$ und

$\alpha > 0$, so ist $\overline{q}(\alpha y) = \alpha \overline{q}(y)$,

$\alpha < 0$, so ist $\overline{q}(\alpha y) = \alpha \underline{q}(y) = \alpha \overline{q}(y)$ (Satz 30).

Satz 37. *Der Übergang von L zu $L^{\times}(F_0)$ ist eine Abschließungsoperation. Genauer:*

1. $L^{\times}(F_0) > L$.

2. *Ist $L_1 < L_2 < M$ und sind F_1, F_2 monotone Linearformen auf L_1, L_2, wobei F_2 Fortsetzung von F_1 ist, so ist $L_1^{\times}(F_1) < L_2^{\times}(F_2)$.*

3. $(L^{\times}(F_0))^{\times}(F) = L^{\times}(F_0)$. *Dabei bedeutet F die (eindeutig bestimmte) monotone und lineare Fortsetzung von F_0 auf $L^{\times}(F_0)$.*

Beweis. 1. ist schon in Satz 35 enthalten.

2. Wir bezeichnen mit $\overline{S}_i, \underline{S}_i, \overline{q}_i, \underline{q}_i$ die gemäß den Definitionen 7 und 8 in bezug auf (L_i, F_i) $(i = 1, 2)$ gebildeten Mengen bzw. Zahlen. Aus $L_1 < L_2$ f lgt nun für jedes $y \in M$, daß $L_1 \cap (y + P) < L_2 \cap (y + P)$ ist. Also ist auch $\overline{S}_1(y) < \overline{S}_2(y)$ und ebenso $\underline{S}_1(y) < \underline{S}_2(y)$. Da nun, falls $y \in L_1^{\times}(F_1)$ ist, nach Satz 23 $\overline{q}_1(y) = \underline{q}_1(y)$, d.h. $\inf \overline{S}_1(y) = \sup \underline{S}_1(y)$ ist, ist erst recht $\inf \overline{S}_2(y) \leq \sup \underline{S}_2(y)$. Daraus und aus Satz 27 folgt aber $\inf \overline{S}_2(y) = \sup \underline{S}_2(y)$, also $\overline{q}_2(y) = \underline{q}_2(y)$, d.h. $y \in L_2^{\times}(F_2)$.

3. Wir schreiben kurz $L^{\times}$ und $L^{\times\times}$ für die in 3. auftretenden Räume, deren Gleichheit zu beweisen ist. Nach 2. ist $L^{\times\times} > L^{\times}$, da nach 1. $L^{\times} > L$ ist. Es bleibt also nachzuweisen, daß auch $L^{\times} > L^{\times\times}$ ist. Sei deshalb $z \in L^{\times\times}$, d.h.

$$\overline{q}^{\times}(z) = \underline{q}^{\times}(z), \tag{10}$$

[23]) Vgl. dazu [3], § 6 und [5], Abschnitt V.

[Mit $\overline{q}^{\times}$ bzw. $\underline{q}^{\times}$ bezeichnen wir die gemäß Definition 8 auf Grund von $(L^{\times}, F)$ gebildeten Größen.] Wegen

$$\overline{q}^{\times}(z) = \inf F\left(L^{\times} \cap (z + P)\right) + \mathrm{P}$$

und

$$\underline{q}^{\times}(z) = \sup F\left(L^{\times} \cap (z - P)\right) - \mathrm{P}$$

existieren zu jedem reellen $\varepsilon > 0$

(11a) $\quad \overline{y} \in L^{\times} \cap (z + P), \quad$ so daß $\quad \overline{q}(\overline{y}) = F(\overline{y}) < \overline{q}^{\times}(z) + \varepsilon$

ist, und

(11b) $\quad \underline{y} \in L^{\times} \cap (z - P), \quad$ so daß $\quad \underline{q}(\underline{y}) = F(\underline{y}) > \underline{q}^{\times}(z) - \varepsilon$

ist. Auf Grund der Definition von $\overline{q}(\overline{y})$ und $\underline{q}(\underline{y})$ existieren sodann

(12a) $\quad \overline{x} \in L \cap (\overline{y} + P), \quad$ so daß $\quad F_0(\overline{x}) < \overline{q}(\overline{y}) + \varepsilon$

ist, und

(12b) $\quad \underline{x} \in L \cap (\underline{y} - P), \quad$ so daß $\quad F_0(\underline{x}) > \underline{q}(\underline{y}) - \varepsilon$

ist. Aus (11) und (12) folgt

$$F_0(\overline{x}) < \overline{q}^{\times}(z) + 2\varepsilon \quad \text{und} \quad F_0(\underline{x}) > \underline{q}^{\times}(z) - 2\varepsilon,$$

also wegen (10)

$$F_0(\overline{x}) - F_0(\underline{x}) < 4\varepsilon.$$

Da ferner wegen (11) und (12) $\overline{x} \in L \cap (z + P)$ und $\underline{x} \in L \cap (z - P)$ ist, ist $\overline{q}(z) \leqq F_0(\overline{x})$ und $\underline{q}(z) \geqq F_0(\underline{x})$ und somit $\overline{q}(z) - \underline{q}(z) < 4\varepsilon$. Daraus und aus Satz 27 folgt (da ja ε eine beliebige positive Zahl war) $\overline{q}(z) = \underline{q}(z)$, d.h. $z \in L^{\times}(F_0)$, w. z. b. w.

Literatur

[1] BANACH, ST.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] HADWIGER, H., u. A. KIRSCH: Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit. Portugaliae Mathematica **11**, 57—67 (1952). — [3] KIRSCH, A.: Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen. Math. Annalen **124**, 343—363 (1952). — [4] HADWIGER, H.: Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration. Archiv der Math. **5**, 115—122 (1954). — [5] HADWIGER, H., u. W. NEF: Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen. Math. Z. **60**, 305—319 (1954). — [6] NEF, W.: Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Comm. Math. Helv. **28**, 162—172 (1954). — [7] NEF, W.: Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt. Math. Annalen **128**, 204—227 (1954). — [8] NEF, W.: Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen. Mh. Math. **60**, 190—197 (1956). — [9] NEF, W.: Invariante Linearformen. Erscheint demnächst in den Math. Nachrichten. — [10] HADWIGER, H.: Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum. Comm. Math. Helv. **28**, 119—148 (1954).

Bern (Schweiz), Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 20. März 1956)

MORGENSTERN, D.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 143—146 (1956)

Eine Verschärfung der Ostrowski'schen Determinantenabschätzung

Von

DIETRICH MORGENSTERN *)

A. OSTROWSKI[1]) hat bewiesen, daß für die Determinante A einer n-reihigen quadratischen Matrix $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$, deren Elemente die Ungleichungen

$$(1) \qquad s_\mu = |a_{\mu\mu}| - \sum_{\nu=1}^{n}{}' |a_{\mu\nu}| \geq 0 \qquad \left(\mu = 1, \ldots, n; \sum{}' = \sum_{\nu \neq \mu}\right)$$

erfüllen, die Abschätzung

$$(2) \qquad |A| \geq s_1 \cdot s_2 \ldots s_n$$

gilt; es ist also insbesondere $A \neq 0$, wenn alle $s_\mu > 0$ sind[2]). In einer späteren Arbeit hat OSTROWSKI[3]) die Abschätzung (2) wesentlich verschärft. In dieser Note geben wir eine andere Verschärfung der Ungleichung (2) für reelle Matrizen; die Methode ist von derjenigen von OSTROWSKI verschieden, in einem speziellen Fall aber schon von L. LÉVY[4]) benutzt worden, wie mir nachträglich bekannt wurde.

Eine erste Verschärfung von (2) ist, wie wir zeigen werden, die Ungleichung

$$(3) \qquad \begin{cases} |A| \geq s_1 \cdot s_2 \ldots s_n + \\ \quad + \left\{ \sum_{\nu}{}' |a_{1\nu}|\, s_2 \ldots s_n + \sum_{\nu}{}' |a_{2\nu}|\, s_1 s_3 \ldots s_n + \cdots + \sum_{\nu}{}' |a_{n\nu}|\, s_1 \ldots s_{n-1} \right\}. \end{cases}$$

*) Herrn Prof. Dr. MAX MÜLLER in Tübingen danke ich für das Interesse, das er an der vorliegenden Untersuchung nahm. Ihm verdanke ich insbesondere die Literaturangaben.

[1]) OSTROWSKI, A.: Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminantes. Bull. Sci. mathématiques (2) **64**, 19—32 (1937).

[2]) Letzteres ergaben schon vorher Betrachtungen von S. GERSCHGORIN. Vgl. GERSCHGORIN, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Bull. Acad. sci. URSS (7), classe des sciences mathématiques et naturelles **1931**, 749—754. Seine weitergehende Behauptung, daß schon dann $A \neq 0$ ist, wenn wenigstens ein s_μ positiv ist, ist dagegen falsch, wie das Beispiel der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

zeigt. Wenn aber etwa die Voraussetzung, daß alle $a_{\mu\nu}$ von Null verschieden sind, hinzutritt, ist GERSCHGORINs Beweis und Behauptung richtig.

[3]) OSTROWSKI, A.: Über die Determinanten mit überwiegendem Hauptglied. Commentarii mathematici Helvetici **10**, 69—96 (1937/38).

[4]) LÉVY, L.: Sur la probabilité de l'équilibre électrique. C. R. Acad. Sci. Paris **93**, 707—708 (1881).

Aus (3) ersieht man: Gilt in keiner der Ungleichungen (1) das Gleichheitszeichen, so kann in (2) nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn

$$\sum_{\nu}' |a_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

d.h. wenn $a_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ ist, also die Matrix $\mathfrak{A}$ Diagonalform hat. Wenn aber $\mathfrak{A}$ Diagonalform hat, so ist auch $|A| = s_1 \ldots s_n$. Daß diese Aussage über das Eintreten des Gleichheitszeichens in der Abschätzung (2) auch nur unter der schärferen Voraussetzung $s_1 \cdot s_2 \ldots s_n > 0$ gilt, zeigt schon die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

M. MÜLLER[5]) hat bewiesen: Die Determinante A ist genau dann von Null verschieden, wenn es eine n-reihige Matrix $\mathfrak{B}$ von Zahlen $b_{\mu\nu}$ gibt, die die n Ungleichungen

$$S_\mu = \Big|\sum_{\nu} a_{\mu\nu} b_{\mu\nu}\Big| - \sum_{\nu}' \Big|\sum_{\lambda} a_{\mu\lambda} b_{\nu\lambda}\Big| > 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

befriedigen. Es gilt dann, wenn $B = \mathrm{Det}(b_{\mu\nu})$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$|A \cdot B| \geq S_1 \ldots S_n. \tag{4}$$

Aus der vorstehenden Bemerkung über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2) folgt, daß in (4) nur dann das Gleichheitszeichen steht, wenn

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{D}$$

ist, wo $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix bedeutet[6]).

Eine Verallgemeinerung auf komplexe Matrizen in Richtung einer Aussage über den Realteil ihrer Determinanten ist nicht möglich, wie das Beispiel

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5-2i & 0 & 0 \\ 5-2i & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5-2i \\ 0 & 0 & 5-2i & 6 \end{pmatrix}; \qquad A = -175 + 600i$$

zeigt.

Satz. *Sind die Elemente $a_{\mu\nu}$ reell und die Ungleichungen*

$$s_\mu = a_{\mu\mu} - \sum_{\nu}' |a_{\mu\nu}| \geq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

erfüllt, so ist

$$\begin{cases} A \geq s_1 \cdot s_2 \ldots s_n + \\ \quad + \left\{\sum_{\nu}' |a_{1\nu}|\, s_2 \ldots s_n + \sum_{\nu}' |a_{2\nu}|\, s_1 s_3 \ldots s_n + \cdots + \sum_{\nu}' |a_{n\nu}|\, s_1 \ldots s_{n-1}\right\}. \end{cases} \tag{6}$$

[5]) MÜLLER, M.: Ein Kriterium für das Nichtverschwinden von Determinanten. Math. Z. **51**, 291—293 (1948).

[6]) Die Frage, wann in (2) bzw. (4) das Gleichheitszeichen gilt, legte mir ERNST MOHR vor; sie gab den Anlaß zur vorliegenden Untersuchung.

Beweis. Im Falle $n=2$ ist mit Rücksicht auf (5)

$$A=\begin{vmatrix} s_1+|a_{12}| & a_{12} \\ a_{21} & s_2+|a_{21}| \end{vmatrix}=s_1\cdot s_2+\left(|a_{12}|\cdot s_2+|a_{21}|\,s_1\right)+\begin{vmatrix} |a_{12}| & a_{12} \\ a_{21} & |a_{21}| \end{vmatrix},$$

also, weil die letzte Determinante gleich

$$|a_{12}a_{21}|-a_{12}a_{21}\geqq 0$$

ist,

$$A\geqq s_1\cdot s_2+\left(|a_{12}|\cdot s_2+|a_{21}|\cdot s_1\right).$$

Für $n=2$ ist also (6) richtig.

Den Fall eines beliebigen $n>2$ behandeln wir nunmehr mittels vollständiger Induktion. Wir machen die

Induktionsvoraussetzung: Alle höchstens $n-1$-reihigen Determinanten, bei denen die Diagonalelemente die Elemente derselben Zeile in der durch die Ungleichung (5) beschriebenen Weise überwiegen, sind nicht negativ.

Drückt man die Elemente $a_{\mu\mu}$ gemäß (5) durch die s_μ und die übrigen Elemente derselben Zeile aus und wendet man den Summensatz an, so ergibt sich für A die Darstellung

$$(8)\qquad \begin{cases} A=s_1\dots s_n+ \\ \quad+\left\{\sum_\nu{}'|a_{1\nu}|\,s_2\dots s_n+\sum_\nu{}'|a_{2\nu}|\,s_1s_3\dots s_n+\dots+\sum_\nu{}'|a_{n\nu}|\,s_1\dots s_{n-1}\right\}+ \\ \quad+F_2+\dots+F_n. \end{cases}$$

Darin ist für $\nu=2,\dots,n-1$

$$(9)\qquad F_\nu=\sum_{(q_1,\dots,q_{n-\nu})}\begin{vmatrix} \sum_\lambda{}'|a_{p_1\lambda}| & a_{p_1p_2} & \dots & a_{p_1p_\nu} \\ a_{p_2p_1} & \sum_\lambda{}'|a_{p_2\lambda}| & \dots & a_{p_2p_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_\nu p_1} & a_{p_\nu p_2} & \dots & \sum_\lambda{}'|a_{p_\nu\lambda}| \end{vmatrix} s_{q_1}\dots s_{q_{n-\nu}},$$

wobei $(q_1,\dots,q_{n-\nu})$ eine Zusammenstellung von $n-\nu$ der Zahlen $1,2,\dots,n$ in ihrer natürlichen Reihenfolge, $(p_1,\dots,p_\nu)$ die Zusammenstellung der übrigen der Zahlen $1,2,\dots,n$ in ihrer natürlichen Reihenfolge bedeutet und die Summe über alle diese Zusammenstellungen $(q_1,\dots,q_{n-\nu})$ zu vollziehen ist. Ferner ist

$$(10)\qquad F_n=\begin{vmatrix} \sum_\lambda{}'|a_{1\lambda}| & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \sum_\lambda{}'|a_{2\lambda}| & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \sum_\lambda{}'|a_{n\lambda}| \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten höchstens $n-1$-ten Grades, die die Koeffizienten der homogenen Form $n-\nu$-ten Grades F_ν in den Größen $s_1,\dots,s_n$ sind, erfüllen

ersichtlich die Induktionsvoraussetzung und sind daher alle nicht-negativ. Also ist auch

$$F_\nu \geqq 0 \qquad (\nu = 2, \ldots, n-1). \tag{11}$$

Die Determinante F_n läßt sich darstellen als eine Summe von n-reihigen Determinanten, in denen außerhalb der Hauptdiagonalen in jeder Zeile nur eine Stelle nicht mit 0 besetzt ist; das Element in der Hauptdiagonalen ist der absolute Betrag des Elementes derselben Zeile, das außerhalb der Hauptdiagonalen steht.

Wenn in einer solchen Determinante eine Spalte außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen hat, zerfällt die Determinante in das Produkt des Hauptdiagonalelementes dieser Spalte mit einer Determinante $(n-1)$-ten Grades, in der die Hauptdiagonalelemente mindestens so groß sind wie die Summe der Beträge der übrigen Elemente in ihrer Spalte; diese $(n-1)$-reihige Determinante ist also nach Induktionsvoraussetzung nicht negativ. Damit ist dann auch der betrachtete Summand der Summe F_n nicht negativ.

Wenn aber in einer solchen Determinante jede Spalte außer dem Hauptdiagonalelement noch weitere von Null verschiedene Elemente enthält, enthält jede Spalte deren genau eines; denn es sind insgesamt nur n von Null verschiedene und nicht in der Hauptdiagonalen stehende Elemente vorhanden. Durch gleichartige Vertauschung von Zeilen und Spalten kann man eine solche Determinante als Produkt von Determinanten der Gestalt

$$\begin{vmatrix} |b_1| & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |b_2| & b_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & |b_{\varkappa-1}| & b_{\varkappa-1} \\ b_\varkappa & 0 & \ldots & 0 & |b_\varkappa| \end{vmatrix}$$

darstellen[7]), woraus man entnimmt, daß ihr Wert ein Produkt von Faktoren

$$|b_1 \ldots b_\varkappa| - (-1)^\varkappa b_1 \ldots b_\varkappa \geqq 0,$$

also selbst $\geqq 0$ ist[8]).

Hiernach ist auch $F_n \geqq 0$. Insgesamt ergibt sich aus (8) und den Ungleichungen

$$F_\mu \geqq 0 \qquad (\mu = 2, \ldots, n) \tag{12}$$

die Ungleichung (6) und schließlich die Allgemeingültigkeit der Behauptung.

Den bisherigen Betrachtungen entnimmt man zugleich folgenden

Zusatz. *Die Abschätzungen* $A \geqq s_1 s_2 \ldots s_n$ *und* (6) *sind erstes und zweites Glied einer Kette von Abschätzungen für A nach unten, von denen jede folgende mindestens so scharf ist wie die vorangehende und deren letzte die Identität* (8) *ist. Man erhält diese Abschätzungen, indem man in* (8) *die rechte Seite nach irgendeinem* F_μ *abbricht und* $\geqq$ *statt* $=$ *schreibt.*

[7]) Vgl. OSTROWSKI, A. in [3]) a. a. O., S. 92.

[8]) Wegen dieses Schlusses ist die Ausdehnung auf komplexe Zahlen nicht möglich!

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 28. April 1956)

Schaefer, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 147—163 (1956)

Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen *)

Von
Helmut Schaefer

Einleitung

Eben als die klassische Theorie linearer Fredholmscher Integralgleichungen durch die berühmte Rießsche Arbeit des Jahres 1918 in den natürlichen Rahmen linearer topologischer Räume gestellt worden war, machte Noether [*17*] auf eine neue Klasse linearer Integralgleichungen aufmerksam, nämlich diejenigen, in denen ein Kern vom Typus des Cauchyschen Hauptwertes auftritt. An Anwendungen in der mathematischen Physik — es sei nur an das Hilbert-Poincarésche Problem erinnert [*15*] — nicht ärmer als jene, zeigte diese Klasse enge Analogie mit den Fredholmschen Gleichungen: Die Lösbarkeitsbedingungen blieben dieselben, auch waren die Anzahlen linear unabhängiger Lösungen der homogenen und adjungierten homogenen Gleichung stets endlich; nur stimmten diese Anzahlen nicht mehr notwendig überein. Die Theorie solcher Gleichungen ist von zahlreichen Autoren weiterentwickelt worden; wir nennen Carleman [*5*], Giraud [*6*], [*7*], Michlin [*14*], Muskhelishvili [*15*] und Vekua [*21*]. (Vgl. auch Söhngen [*19*] und die dort zitierte Literatur.)

Während nun die Theorie vollstetiger Abbildungen in topologischen Vektorräumen seit Riesz Gegenstand zahlreicher Arbeiten war und durch Leray [*13*] in lokalkonvexen, durch Williamson [*22*] sogar in beliebigen topologischen Vektorräumen als gültig erkannt worden ist — für eine in anderer Richtung gehende Verallgemeinerung s. Graves [*9*] —, wurde die den singulären Integralgleichungen entsprechende abstrakte Theorie erst verhältnismäßig spät in Angriff genommen. Neben Gochberg [*8*] und Halilov [*10*] hat vor allem Atkinson [*1*] die grundlegenden Eigenschaften linearer Operatoren, wie sie durch singuläre Integraloperatoren (im Sinne von [*15*]) repräsentiert werden, in Banach-Räumen entwickelt. (Für eine Ausdehnung auf allgemeinere Operatorenklassen in B-Räumen vgl. [*2*].) Den mit diesen singulären Gleichungen eng verknüpften Begriff normaler Auflösbarkeit hatten Hausdorff [*11*], Nikolskij [*16*] untersucht.

Die vorliegende Arbeit hat wesentlich zwei Ziele. Zunächst sollen im ersten Abschnitt die zur Herleitung der Lösbarkeitseigenschaften singulärer Integralgleichungen [vgl. **2**, Gl. (A) und Satz 10] erforderlichen Hilfsmittel bereitgestellt werden. Dieser Abschnitt beschränkt sich auf lineare Abbildungen eines Hilbertschen Raumes in sich und setzt, außer einem bekannten Satz

*) Diese Arbeit lag einem auf einer Spezialtagung über Funktionalanalysis im März 1956 in Oberwolfach gehaltenen Vortrag zugrunde.

von BANACH [4], nur die elementare Theorie Hilbertscher Räume voraus. Zentral ist Satz 3, aus dem sich fast alle übrigen Sätze leicht ergeben.

Im zweiten Abschnitt werden nun die Lösbarkeitsaussagen (Satz 10) für die Gl. (A) aus den Ergebnissen des ersten Abschnitts gefolgert. Es zeigt sich hierbei, daß im Gegensatz zu [15], wo (wohl wesentlich aus analytischen Gründen) Banach-Räume hölderstetiger Funktionen zugrundegelegt werden, anscheinend der Hilbert-Raum quadratisch summierbarer Funktionen den natürlichen Hintergrund der Theorie abgibt; auch die Definition des Hauptwertintegrals für beliebige quadratisch summierbare Funktionen ist prinzipiell in elementarer Weise möglich (Satz 9, vgl. auch [14]). Ich hoffe, in diesen beiden Abschnitten einen neuen Weg zu den wichtigsten Resultaten der Theorie gezeigt zu haben, der nicht allgemeiner als nötig ist und daher auch dem mehr an den Anwendungen interessierten Leser zugemutet werden kann.

Mit der Übertragung der Theorie auf beliebige lokalkonvexe Räume beschäftigt sich der dritte Abschnitt. Die hier als σ-Transformationen (Def. 3) bezeichneten Homomorphismen sind naturgemäße Verallgemeinerungen der vorher in Hilbertschen Räumen betrachteten verallgemeinerten Fredholmschen Operatoren (ATKINSON [1]); insbesondere brauchen jetzt der abgebildete und der die Bildmenge enthaltende Raum nicht mehr identisch zu sein. Es zeigt sich, daß alle wesentlichen Merkmale verallgemeinerter Fredholmscher Operatoren erhalten bleiben; zu deren Charakterisierung dient jetzt, an Stelle von Satz 3, Satz 12. Anscheinend gelten die erhaltenen Resultate auch in beliebigen, nicht notwendig lokalkonvexen Vektorräumen, wie dies WILLIAMSON [22] für die LERAYsche Theorie [13] vollstetiger Abbildungen bemerkt hat; ich hoffe, darauf in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

1. σ-Transformationen im Hilbert-Raum

Es sei $\mathfrak{X}$ ein nicht notwendig separabler, komplexer Hilbertscher Raum.

Definition 1. *Eine stetige lineare Abbildung T von $\mathfrak{X}$ in sich heiße σ-Transformation oder verallgemeinerter Fredholmscher Operator, wenn T den Bedingungen genügt:*

1. *$T(\mathfrak{X})$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension.*

2. *Der Nullraum $\mathfrak{N}(T) = \{x : Tx = \vartheta\}$ ist endlichdimensional.*

Beispiele von σ-Transformationen sind die Rieszschen (oder Fredholmschen) Operatoren $I + K$, wo I die identische, K eine vollstetige Abbildung von $\mathfrak{X}$ in sich bedeutet; ferner Abbildungen $A + BS$, wenn $A + B$, $A - B$ invertierbare Operatoren sind und S die Eigenschaften a), b), c) (**2**, Satz 9) besitzt.

Ein Operator $T \in \mathfrak{R}$ — wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ den Ring stetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich — heißt normal auflösbar, wenn er die Eigenschaft besitzt:

(N): *Die Gleichung $Tx = y$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in \mathfrak{X}$, wenn (und nur wenn) $(y, x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathfrak{N}(T^*) = \{x : T^*x = \vartheta\}$* [1].

[1]) Wir bezeichnen mit T^* die Adjungierte von T; man beachte, daß $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$ (λ^* die zu λ konjugiert komplexe Zahl).

Man weist unschwer nach, daß jede σ-Transformation die Eigenschaft (N) besitzt. Allgemeiner gilt, daß in jedem lokalkonvexen linearen Raum (N) mit der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{X})$ äquivalent ist.

Kodimension von $T(\mathfrak{X})$ heißt die Dimension des Quotientenraumes $\mathfrak{X}/T(\mathfrak{X})$. Dieser ist dem Nullraum $\mathfrak{N}(T^*)$ der adjungierten Transformation T^* isomorph — die Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{X})$ vorausgesetzt.

Daher können die Axiome 1., 2. durch die folgenden ersetzt werden[2]):

1°. *T ist normal auflösbar* [d.h. T besitzt die Eigenschaft (N)].

2°. *Die Nullräume $\mathfrak{N}(T)$ und $\mathfrak{N}(T^*)$ sind endlichdimensional.*

Es ist vielleicht nicht überflüssig, zwei einfache Beispiele für die Unabhängigkeit der Axiome 1., 2. zu geben.

1. Sei $\mathfrak{X}$ der lineare Raum aller wohlgeordneten Folgen komplexer Zahlen vom Typus $\omega \cdot 2$: $x = (x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots)$; mit der Forderung

$$\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |y_\nu|^2 < +\infty$$

ist $\mathfrak{X}$ Hilbertscher Raum. Für $Tx = (0, 0, \ldots; x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ ist $\|Tx\| = \|x\|$, daher $\mathfrak{N}(T) = \{\vartheta\}$, während $\mathfrak{X} = \mathfrak{U} \oplus T(\mathfrak{X})$[3]) mit $\mathfrak{U} = \{(x_1, x_2, \ldots; 0, 0, \ldots)\}$. T genügt 2., aber nicht 1.

2. Sei $\mathfrak{X}_0$ ein Hilbertscher Raum (unendlicher Dimension), $\mathfrak{X}$ direkte Summe abzählbar vieler zu $\mathfrak{X}_0$ isomorpher Räume; etwa $\mathfrak{X} = \{(x_1, x_2, \ldots)\}$, $x_\nu \in \mathfrak{X}_0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und

$$\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|x_\nu\|^2 < +\infty.$$

Sei T_0 ein (stetiger) Automorphismus von $\mathfrak{X}_0$ und $Tx = T(x_1, x_2, \ldots) = (T_0 x_2, T_0 x_3, \ldots)$. Dann ist $T(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, d.h. 1. erfüllt, aber $\mathfrak{N}(T) = \{(x_1, 0, 0, \ldots)\}$ isomorph zu $\mathfrak{X}_0$, also von unendlicher Dimension, so daß 2. verletzt ist.

Wir beschließen diese einleitenden Bemerkungen mit dem

Satz 1. *Wenn T σ-Transformation ist, so auch T^*.*

Beweis. Wenn $T^*(\mathfrak{X})$ abgeschlossen ist, so gelten, wie bemerkt, die Isomorphieaussagen: $\mathfrak{N}(T^*) \cong \mathfrak{X}/T(\mathfrak{X})$ und $\mathfrak{N}(T) \cong \mathfrak{X}/T^*(\mathfrak{X})$. Da nach Voraussetzung die rechte Seite der ersten sowie die linke Seite der zweiten Relation endliche Dimension besitzen, so bleibt nur zu beweisen: $T^*(\mathfrak{X})$ ist abgeschlossen.

Sei $T^* x_n = y_n \to y$. Wir haben zu zeigen: Es existiert $x \in \mathfrak{X}$ mit $T^* x = y$. Nun ist (Tz, x_n) konvergent für jedes $z \in \mathfrak{X}$. Daher sind die Einschränkungen der Funktionale x_n auf $T(\mathfrak{X})$ schwach konvergent [auf $T(\mathfrak{X})$] mit dem Limes $\hat{x}$ [$\hat{x}$ stetige Linearfunktion auf $T(\mathfrak{X})$]. Sei x eine Erweiterung von $\hat{x}$ auf den ganzen Raum $\mathfrak{X}$. Offenbar gilt

$$(z, y) = \lim_{n \to \infty} (Tz, x_n) = (Tz, \hat{x}) = (Tz, x) = (z, T^* x) \qquad (z \in \mathfrak{X}),$$

daher $y = T^* x$, w. z. b. w.

---

[2]) Vgl. Atkinson [1], p. 4.

[3]) $\oplus$ bezeichnet, wie üblich, eine orthogonale Summe, $\ominus$ eine orthogonale Differenz (d.h. für abgeschlossene Teilräume $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ orthogonales Komplement von $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$); speziell $\mathfrak{X} \ominus \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\perp$.

Bemerkung. Der Beweis von Satz 1 bleibt gültig, wenn $\mathfrak{X}$ durch einen reflexiven F-Raum[4]) ersetzt wird (Definition 1 macht von der Voraussetzung: $\mathfrak{X}$ Hilbertscher Raum, keinen Gebrauch; vgl. **3**).

Als nächstes beweisen wir, daß die Menge Σ aller σ-Transformationen in $\mathfrak{R}$ eine Halbgruppe[5]) bildet, d.h. daß mit S und T auch ST zu Σ gehört.

Satz 2. *Aus* $S\in\Sigma$, $T\in\Sigma$ *folgt* $ST\in\Sigma$.

Beweis. Die Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}(ST)$ ist offenbar $\leq n_1+n_2$, wenn n_1 bzw. n_2 diejenigen von $\mathfrak{N}(S)$ bzw. $\mathfrak{N}(T)$ bezeichnen; denn aus $STx=\vartheta$ folgt $Tx\in\mathfrak{N}(S)$. Entsprechendes gilt von $\mathfrak{N}(T^*S^*)$, vgl. Satz 1. Es bleibt die Abgeschlossenheit von $ST(\mathfrak{X})$ zu zeigen. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{X}=T(\mathfrak{X})\oplus\mathfrak{M}$, wo $T(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}_1$ abgeschlossen, $\mathfrak{M}$ endlichdimensional ist. Weiter ist $S(\mathfrak{X})$ abgeschlossen, $S\{T(\mathfrak{X})\ominus\mathfrak{N}(S)\}$ abgeschlossen und $\mathfrak{N}(S)$ von endlicher Dimension. Daher ist $S(\mathfrak{X}_1)=ST(\mathfrak{X})$ abgeschlossen, w. z. b. w.

Wie aus den Axiomen 1., 2. unmittelbar folgt, ist jeder (stetige) Automorphismus von $\mathfrak{X}$, d.h. jeder invertierbare (beschränkte) Operator σ-Transformation; mit anderen Worten ist die Gruppe Γ aller (stetigen) Automorphismen von $\mathfrak{X}$ Untergruppe von Σ. Bekanntlich besitzt Γ die Eigenschaften: 1. Γ *ist offen in der Banach-Algebra* $\mathfrak{R}$ stetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich; 2. $\Gamma+\Phi\subset\Sigma$, wo Φ das Ideal vollstetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich bezeichnet. Es ist bemerkenswert, daß beide Aussagen für Σ erhalten bleiben: 1. Σ *ist offen in* $\mathfrak{R}$; 2. $\Sigma+\Phi\subset\Sigma$.

Wir beweisen dies mit Hilfe folgender Charakterisierung von Σ:

Satz 3. *Sei* $T\in\mathfrak{R}$ *und* $\operatorname{Dim}\mathfrak{X}\geq\aleph_0$[6]). *Es gilt* $T\in\Sigma$, *wenn und nur wenn zwei Elemente* $R\in\Sigma$, $S\in\Sigma$ *existieren, so daß* $RTS=I$.

Beweis. Die *Notwendigkeit* der Bedingung ergibt sich wie folgt: Sei $T\in\Sigma$. Da der Nullraum $\mathfrak{N}(T)$ von endlicher Dimension ist, ist sein orthogonales Komplement $\mathfrak{N}(T)^\perp$ zu $\mathfrak{X}$ isomorph[7]) (denn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{N}(T)^\perp$ sind dimensionsgleich). Sei also S ein solcher Isomorphismus: $S(\mathfrak{X})=\mathfrak{N}^\perp$. Nun ist T ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{N}^\perp$ und $T(\mathfrak{X})$[8]), folglich TS ein solcher zwischen $\mathfrak{X}$ und $T(\mathfrak{X})$. Sei R^0 die Inverse von TS, dann haben wir $R^0TS=I$ auf $\mathfrak{X}$. Offenbar ist S zugleich ein (stetiger) Endomorphismus von $\mathfrak{X}$, während R^0 — zunächst nur auf $T(\mathfrak{X})$ erklärt — auf $\mathfrak{X}$ stetig fortgesetzt werden kann: $Rx=R^0z$, wenn z die Projektion von $x\in\mathfrak{X}$ auf $T(\mathfrak{X})$ bedeutet. Wir haben noch zu zeigen, das $S\in\Sigma$ und $R\in\Sigma$.

Aber $S(\mathfrak{X})=\mathfrak{N}^\perp$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension, während der Nullraum von S nur aus der Null $\{\vartheta\}$ besteht. Umgekehrt ist der Nullraum $\mathfrak{N}(R)=T(\mathfrak{X})^\perp$, also endlichdimensional und $R(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}$.

---

[4]) F-Raum heißt jeder metrisierbare, vollständige lokalkonvexe lineare Raum (vgl. 3).

[5]) Für den Begriff Halbgruppe s. E. HILLE, Semi-groups and functional analysis (New York 1948).

[6]) Dim $\mathfrak{X}$ bezeichnet die Mächtigkeit einer (beliebigen) orthogonalen Basis von $\mathfrak{X}$.

[7]) Der Ausdruck isomorph bezieht sich stets auf die algebraische und topologische Struktur, d.h. isomorph = linear homöomorph.

[8]) Dies ist Konsequenz eines bekannten Satzes von BANACH [4].

Hinlänglichkeit: Es sei jetzt $R \in \Sigma$, $S \in \Sigma$ und $T \in \mathfrak{R}$, $RTS = I$. Wäre der Nullraum $\mathfrak{N}(T)$ von unendlicher Dimension, so könnte nicht $\mathfrak{N}(T) \cap S(\mathfrak{X}) = \{\vartheta\}$ sein, da $S(\mathfrak{X})$ endliche Kodimension besitzt. Daher gäbe es ein $x_0 \neq \vartheta$ mit $TSx_0 = \vartheta$, d. h. auch $RTSx_0 = \vartheta$. Dieser Widerspruch beweist, daß $\mathfrak{N}(T)$ von endlicher Dimension ist. Wäre nun $\mathfrak{M} = T(\mathfrak{X})^{\perp}$ von unendlicher Dimension, so müßte ein Element $z \perp \mathfrak{N}(R)$ vorhanden sein, $z \neq \vartheta$, welches keine Darstellung $z = Tu$ besitzt, so daß auch $x = Rz$ keine Darstellung $x = RTv$ besäße; jedoch liefert $v = Sx$ wegen $RTS = I$ eine solche.

Es bleibt noch zu beweisen, daß $T(\mathfrak{X})$ abgeschlossen ist. Wir setzen $S(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$, $T(\mathfrak{X}_1) = \mathfrak{X}_2$. Wegen $R(\mathfrak{X}_2) = I(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, der Stetigkeit von R und $\overline{\mathfrak{X}}_2 \cap \mathfrak{N}(R) = \{\vartheta\}$ ist $\mathfrak{X}_2$ abgeschlossen. Weiter ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_1^{\perp}$, wo der zweite Summand von endlicher Dimension ist. Daher ist $T(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_2 + T(\mathfrak{X}_1^{\perp})$ abgeschlossen, w. z. b. w.

Wir gehen nun zum Beweis der beiden oben für Σ formulierten Behauptungen über.

Satz 4. *Σ ist offene Teilmenge der Banach-Algebra $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Wir haben zu zeigen: Zu $T \in \Sigma$ existiert $r > 0$, so daß aus $A \in \mathfrak{R}$, $\|A\| < r$, folgt $T + A \in \Sigma$. Nach Satz 3 ist für zwei Elemente $R \in \Sigma$, $S \in \Sigma$ $RTS = I$. Sei $r = (\|R\| \|S\|)^{-1}$. Dann ist für $\|A\| < r$ $\|RAS\| < 1$ und

$$R(T + A)S = I + RAS = A_1$$

eine invertierbare Transformation in $\mathfrak{R}$, folglich für $R_1 = R$, $S_1 = SA_1^{-1}$

$$R_1(T + A)S_1 = (I + RAS)A_1^{-1} = I,$$

was nach Satz 3 für $T + A \in \Sigma$ hinreicht, falls $R_1 \in \Sigma$, und $S_1 = SA_1^{-1} \in \Sigma$; dies leuchtet auch für S_1 unmittelbar ein.

Satz 5. *Sei Φ das Ideal vollstetiger linearer Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in sich; dann ist $\Sigma + \Phi < \Sigma$, d. h. aus $T \in \Sigma$ folgt $T + K \in \Sigma$ für beliebiges (lineares) vollstetiges K.*

Beweis. Wie beim Beweis des vorigen Satzes folgern wir aus $RTS = I$

$$R(T + K)S = I + RKS = I + K_1$$

mit vollstetigem K_1. Aus der Rießschen Theorie folgt, daß $I + K_1 \in \Sigma$. Daher gibt es nach Satz 3 zwei weitere Elemente $R_1 \in \Sigma$, $S_1 \in \Sigma$, so daß $R_1(I + K_1)S_1 = I$. Nun sind nach Satz 2 $U = R_1R$ und $V = SS_1$ ebenfalls Transformationen aus Σ. Also gilt auch

$$U(T + K)V = I$$

mit $U \in \Sigma$, $V \in \Sigma$, woraus sich wieder (Satz 3) $T + K \in \Sigma$ ergibt.

Das Verhalten eines Fredholmschen Operators bezüglich der Gleichung $Tx = y$ kann durch die sog. „determinantenfreien" Sätze der Integralgleichungstheorie charakterisiert werden. Wie man leicht nachprüft, besteht der Inhalt dieser Sätze aus den Axiomen 1°., 2°. und dem folgenden: 3°. Für die Dimensionen n bzw. m der Nullräume $\mathfrak{N}(T)$ bzw. $\mathfrak{N}(T^*)$ gilt: $n = m$ [9]).

[9]) Zu diesen Sätzen wird gewöhnlich noch die Aussage gezählt, daß für $T_\lambda = T - \lambda K$ $n = m = 0$ mit Ausnahme einer abgeschlossenen Menge $\{\lambda_\nu\}$ isolierter Punkte (vgl. Satz 8).

Im allgemeineren Fall einer σ-Transformation T sind diese Zahlen im allgemeinen verschieden. Ihre Differenz ist eine T in gewisser Weise eigentümliche Zahl (Satz 7) und wird gewöhnlich als Index von T bezeichnet; vgl. auch [20].

Definition 2. *Es seien n bzw. m die Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}(T)$ bzw. die Kodimension von $T(\mathfrak{X})$. Dann heißt $\varkappa(T)=n-m$ der Index von T.*

Für den Index gilt auf Σ das „logarithmische Gesetz" [1]:

Satz 6. *Aus $T_1\in\Sigma$, $T_2\in\Sigma$ folgt $T_1T_2\in\Sigma$* (Satz 2) *und $\varkappa(T_1T_2)=\varkappa(T_1)+\varkappa(T_2)$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit n, n_1, n_2 bzw. m, m_1, m_2 (in dieser Reihenfolge) die Dimensionen der Nullräume $\mathfrak{N}(T)=\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}(T_1)=\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}(T_2)=\mathfrak{N}_2$ bzw. die Kodimensionen der Räume $T(\mathfrak{X})$, $T_1(\mathfrak{X})$, $T_2(\mathfrak{X})$, wobei $T=T_1T_2$ gesetzt ist. Ferner seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ die orthogonalen Komplemente der letzteren Räume.

Zur Bestimmung von n bemerken wir, daß $\mathfrak{N}$ außer einer Basis von $\mathfrak{N}_2$ noch eine Basis eines zu $T_2(\mathfrak{X})\cap\mathfrak{N}_1$ isomorphen Raumes enthält (aber auch keine weiteren linear unabhängigen Elemente). Daher ist

$$n=n_2+\operatorname{Dim}(\mathfrak{M}_2^{\perp}\cap\mathfrak{N}_1)=n_2+j. \tag{1.1}$$

Im Komplement $\mathfrak{M}$ von $T(\mathfrak{X})$ ist außer einer Basis von $\mathfrak{M}_1$ noch eine Basis eines zu $\mathfrak{M}_2\cap\mathfrak{N}_1^{\perp}$ isomorphen Raumes enthalten (und keine weiteren linear unabhängigen Elemente). Folglich hat man

$$m=m_1+\operatorname{Dim}(\mathfrak{M}_2\cap\mathfrak{N}_1^{\perp})=m_1+k. \tag{1.2}$$

Nun ist aber $j=n_1-l_1$, wo l_1 die Anzahl der linear unabhängigen Relationen bedeutet, denen $x\in\mathfrak{N}_1$ durch die Forderung $x\perp\mathfrak{M}_2$ zu genügen hat. Analog gilt $k=m_2-l_2$ und wie man leicht nachprüft, ist $l_1=l_2=l$. Daher folgt aus (1.1), (1.2)

$$\varkappa(T)=n-m=(n_2+n_1-l)-(m_1+m_2-l)=(n_1-m_1)+(n_2-m_2)=\varkappa(T_1)+\varkappa(T_2).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 3 läßt sich nun weiter zeigen, daß der Index auf den in $\Sigma\subset\mathfrak{R}$ gelegenen Mengen $T_0+\mathfrak{U}$, $T_0+\Phi$ konstant ist (T_0 fest), wo $\mathfrak{U}$ eine geeignete (Satz 4) Nullumgebung in $\mathfrak{R}$ bedeutet. *Die Halbgruppe Σ ist* also *Vereinigung offener Mengen in $\mathfrak{R}$, auf denen der Index konstant ist*; keine dieser Mengen ist beschränkt. Die Konstanz des Index auf jeder Menge $T_0+\Phi$ ist für die Theorie singulärer Integralgleichungen von Bedeutung (s. 2).

Satz 7. *Es sei $T_0\in\Sigma$ fest, ferner A eine nur der Bedingung $\|A\|<r$ (r geeignet positiv) unterworfene, K eine beliebige vollstetige lineare Abbildung von $\mathfrak{X}$ in sich. Dann gilt für die Indizes von T_0+A und T_0+K:*

$$\varkappa(T_0+A)=\varkappa(T_0),\qquad \varkappa(T_0+K)=\varkappa(T_0).$$

Beweis. Es sei $\varkappa(T_0)=n-m$ (Def. 2). Dann folgt aus $R\in\Sigma$, $S\in\Sigma$ und $RT_0S=I$ nach Satz 6

$$\varkappa(R)+\varkappa(T_0)+\varkappa(S)=0. \tag{1.3}$$

Nun ist nach Satz 6 mit $r = (\|R\|\,\|S\|)^{-1}$, $A_1 = I + RAS$

$$(1.4)\quad \begin{cases} \varkappa\{R(T_0 + A)\,S\} = \varkappa(R) + \varkappa(T_0 + A) + \varkappa(S) = \varkappa(A_1) = 0, \\ \varkappa\{R(T_0 + K)\,S\} = \varkappa(R) + \varkappa(T_0 + K) + \varkappa(S) = \varkappa(I + RKS) = 0; \end{cases}$$

letzteres wieder nach der Rießschen Theorie. (1.3) und (1.4) ergeben unmittelbar die Behauptung.

Für den mit einem komplexen Parameter λ versehenen Operator $T_0 + \lambda K$ (K vollstetig) gilt schließlich folgender, der Fredholmschen Theorie analoge Satz [10]):

Satz 8. *Sei $T_0 \in \Sigma$, K vollstetig. Dann sind die (stets endlichen) Dimensionen $n(\lambda)$ bzw. $m(\lambda)$ der Nullräume von $T_0 + \lambda K$ bzw. $T_0^* + \lambda^* K^*$, abgesehen von einer höchstens abzählbaren Menge $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ ohne Häufungspunkt im Endlichen, von λ unabhängig: $n(\lambda) = n$, $m(\lambda) = m$ $(\lambda \neq \lambda_\nu)$. In den Punkten der (möglicherweise leeren) Ausnahmemenge gilt stets: $n(\lambda_\nu) > n$, $m(\lambda_\nu) > m$.*

Beweis. Da $T_\lambda = T_0 + \lambda K \in \Sigma$ für alle λ (Satz 5), so sind $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ stets endlich. Wir setzen (λ beliebig komplex)

$$(1.5)\qquad m = \inf m(\lambda), \qquad n = \inf n(\lambda).$$

Sei jetzt λ_0 ein Punkt mit $m(\lambda_0) = m$; es ist dann notwendig $n(\lambda_0) = n$ (Satz 7). Wir betrachten nun die Abbildung $T_0' = T_0 + \lambda_0 K$ und konstruieren wie im ersten Teil des Beweises von Satz 3 zwei stetige lineare Abbildungen $R_0 \in \Sigma$, $S_0 \in \Sigma$, so daß

$$R_0(T_0 + \lambda_0 K)\,S_0 = R_0 T_0'\,S_0 = I.$$

Mit $T_\lambda' = T_0' - \lambda K$ gilt dann

$$R_0 T_\lambda'\,S_0 = I - \lambda K_1.$$

Da $K_1 = R_0 K S_0$ vollstetig ist, existiert mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ $(I - \lambda K_1)^{-1}$ nach der Rießschen Theorie; mit $S_\lambda = S_0(I - \lambda K_1)^{-1}$ haben wir also $R_0 T_\lambda' S_\lambda = I$ $(\lambda \neq \lambda_\nu)$. Nun sind die Teilräume von $\mathfrak{X}$: $S_\lambda(\mathfrak{X}) = S_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}(R_0)^\perp$ von λ unabhängig[11]), und T_λ ist ein linearer Homöomorphismus von $\mathfrak{X}_1$ auf $\mathfrak{X}_2$ (sonst könnte nicht $R_0 T_\lambda' S_\lambda = I$ gelten) für $\lambda \neq \lambda_\nu$. Daher sind die Zahlen $n(\lambda)$ bzw. $m(\lambda)$ nicht größer als die Kodimensionen $n(\lambda_0) = n$ bzw. $m(\lambda_0) = m$ von $\mathfrak{X}_1$ bzw. $\mathfrak{X}_2$:

$$m(\lambda) \leqq m, \qquad n(\lambda) \leqq n \qquad (\lambda \neq \lambda_\nu).$$

Daraus folgt aber wegen (1.5): $m(\lambda) = m$, $n(\lambda) = n$ für $\lambda \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, und der Satz ist vollständig bewiesen.

Korollar. *Ist für ein λ $m(\lambda) = 0$ bzw. $n(\lambda) = 0$, so gilt mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge ohne Häufungspunkt: $m(\lambda) = 0$ bzw. $n(\lambda) = 0$.*

[10]) Eine genaue Analogie mit dem Fredholmschen Fall ergibt sich allerdings nur, wenn für die in (1.5) definierten Zahlen $m = n = 0$; es erscheint berechtigt, dies als den quasi-Fredholmschen Fall zu bezeichnen; er ist aber mit dem in [*15*] so bezeichneten Fall $\varkappa = 0$ nicht identisch.

[11]) R_0 ist Isomorphismus von $\mathfrak{X}_2$ auf $\mathfrak{X}$ (vgl. Fußnote 8).

Ist also wenigstens eine der beiden Zahlen $n(T_0)$ oder $m(T_0)$ gleich Null, so sind die Maximalanzahlen linear unabhängiger Lösungen von $(T_0+\lambda K)x=\vartheta$ bzw. $(T_0^*+\lambda^* K^*)x=\vartheta$ (bis auf eine λ-Menge der betrachteten Art) gleich denen von $T_0 x=\vartheta$ bzw. $T_0^* x=\vartheta$; bei Fredholmschen Operatoren ist dies wegen $T_0=I$ stets der Fall.

2. Singuläre Integralgleichungen

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, die Haupteigenschaften singulärer Integralgleichungen (in einer Dimension) aus den Sätzen von Abschnitt **1** herzuleiten.

Unter einer singulären Integralgleichung für die komplexwertige, gesuchte Funktion (einer Variablen) $\varphi(z)$ verstehen wir eine Gleichung

$$\text{(A)} \qquad a(z)\,\varphi(z)+\frac{b(z)}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\lambda\int_C k(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta=\psi(z) \qquad (z\in C),$$

wo die verwendeten Symbole folgende Bedeutung haben[12]):

C: Stetig gekrümmte, orientierte Jordan-Kurve, die den Ursprung der komplexen Ebene umschließt.

$a(z)$, $b(z)$: Auf C stetig differenzierbare, komplexwertige Ortsfunktionen.

$L^2(C)$: Der Hilbert-Raum quadratisch summierbarer (komplexwertiger) Ortsfunktionen auf C.

$k(z,\zeta)$: Auf $C\times C$ quadratisch summierbarer Kern, λ komplexer Parameter.

$\psi(z)\in L^2(C)$ ist gegeben, $\varphi(z)\in L^2(C)$ gesucht; das Integral $\int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen und existiert fast überall auf C [*23*] (von dieser Tatsache werden wir keinen Gebrauch machen).

Wir setzen $A=a(z)I$, $B=b(z)I$, $K\varphi=\int k(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta$ und

$$\text{(2.1)} \qquad S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Hierbei sind offenbar A, B stetige lineare Abbildungen von $L^2(C)$ in sich, K vollstetig, während S (mittels des Cauchyschen Hauptwertes) in elementarer Weise zunächst nur auf einer in $L^2(C)$ dichten Menge $\mathfrak{D}$ definiert werden kann. Wir können für $\mathfrak{D}$ die Menge aller endlichen Linearkombinationen sämtlicher ganzen Potenzen von z: $\{\ldots, z^{-1}, 1, z, z^2, \ldots\}$ setzen.

Wir zeigen zunächst, daß S auf $L^2(C)$ beschränkt fortgesetzt werden kann.

Satz 9. *Die durch* (2.1) *auf* $\mathfrak{D}$ *definierte lineare Abbildung* S *läßt sich auf* $L^2(C)$ *beschränkt fortsetzen. Die Fortsetzung besitzt die Eigenschaften:*

a) $S^2=I$,

b) $S^*=S-K_1$,

c) $SA-AS=K_2$, $SB-BS=K_3$,

wo K_1, K_2, K_3 *gewisse vollstetige lineare Abbildungen bezeichnen.*

[12]) Bei den folgenden Voraussetzungen wird kein Wert auf größtmögliche Allgemeinheit gelegt. Für allgemeinere Voraussetzungen s. [*14*].

Beweis. S ist, wie bemerkt, jedenfalls auf $\mathfrak{D}$ definiert.

a) Sei $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^+ + \mathfrak{D}^-$; $\mathfrak{D}^+$ lineare Hülle[13]) aller nicht negativen Potenzen von z, $\mathfrak{D}^-$ lineare Hülle aller negativen Potenzen von z. Offenbar gilt eindeutig

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \qquad (\varphi^+ \in \mathfrak{D}^+, \varphi^- \in \mathfrak{D}^-) \tag{2.2}$$

für $\varphi \in \mathfrak{D}$. Nach den Plemeljschen Formeln der Potentialtheorie [*15*] gilt aber, wie man auch leicht direkt nachweist, $Sz^n = z^n$ $(n \geqq 0)$ und $Sz^n = -z^n$ $(n < 0)$ auf C, also $S\varphi^+ = \varphi^+$, $S\varphi^- = -\varphi^-$ und $S\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$,

$$S^2\varphi = \varphi^+ + \varphi^- = \varphi$$

d.h. $S^2 = I$ auf $\mathfrak{D}$ — daher, falls eine beschränkte Fortsetzung existiert, auch auf $L^2(C)$.

b) Bezeichnen wir mit s die Bogenlänge auf C und setzen $\zeta - z = \varrho e^{i\alpha(s,s')}$, $d\zeta = ds'\, e^{i\Theta(s')}$, so folgt (auf $\mathfrak{D}$)

$$\left\{\begin{aligned} &S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_C \varphi(s')\, e^{i[\Theta(s')-\alpha(s,s')]}\,\frac{ds'}{\varrho}, \quad S^*\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_C \varphi(s')\, e^{i[\Theta(s)-\alpha(s,s')]}\,\frac{ds'}{\varrho}, \\ &(S - S^*)\,\varphi = \frac{2}{\pi}\int_C \{\sin[\Theta(s') - \alpha(s,s')] + O[\Theta(s') - \Theta(s)]\}\varphi(s')\,\frac{ds'}{\varrho} \\ &\qquad\qquad = \int_C K_1(s,s')\,\varphi(s')\,ds' = K_1\varphi. \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

Infolge der Voraussetzungen über C ist aber $K_1(s, s')$ (O das bekannte Landausche Symbol) beschränkt, daher K_1 auf ganz $L^2(C)$ definiert.

c) Beweis mit gleichem Argument wie für b); offenbar sind auch K_2, K_3 auf ganz $L^2(C)$ definiert.

Zum Beweis der Fortsetzbarkeit von S genügt es, die Beschränktheit von S auf $\mathfrak{D}$ nachzuweisen. Ersichtlich ist auch S^* auf $\mathfrak{D}$ definiert, vgl. (2.3). Sei $\varphi \in \mathfrak{D}$. Wir haben mit $S^* = S - K_1$ und $S^2 = I$ auf $\mathfrak{D}$ wegen $S(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$

$$\|\varphi\|^2 = (S^*\varphi, S\varphi) = (S\varphi, S\varphi) - (K_1\varphi, S\varphi) = \|S\varphi\|^2 - (K_1\varphi, S\varphi),$$

folglich

$$\|S\varphi\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + \|S\varphi\|\,\|K_1\varphi\|.$$

Daraus folgt (weil K_1 beschränkt ist) die Beschränktheit von S auf $\mathfrak{D}$ und der Satz ist bewiesen.

Um zeigen zu können, daß die durch die linke Seite von (A) definierte Transformation von $L^2(C)$ in sich zu Σ gehört, machen wir noch folgende Voraussetzung über $a(z)$, $b(z)$:

(R): *Es sei* $a^2(z) - b^2(z) \neq 0$ *auf* C.

Aus (R) folgt, daß die Operatoren $A + B$ und $A - B$ invertierbar sind. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz. *Falls die Bedingung* (R) *erfüllt ist, gehört* $T_0 = A + BS$ *zu* Σ.

[13]) Das heißt die Menge aller endlichen Linearkombinationen.

Beweis. Da $BS - SB = -K_3$ vollstetig ist, genügt es nach Satz 5, den Beweis für $T_0' = A + SB$ zu erbringen. Sei $U = A_1 + B_1 S$, wo $A_1 = a_1(z)\, I$, $B_1 = b_1(z)\, I$. Wir bestimmen $a_1(z), b_1(z)$ aus den Gleichungen

$$\begin{cases} a a_1 + b b_1 = 1 \\ b a_1 + a b_1 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

und finden, daß

$$\begin{aligned} U T_0' &= (A_1 + B_1 S)(A + SB) = (A_1 A + B_1 B) + B_1 SA + A_1 SB \\ &= I + (B_1 A + A_1 B) S + B_1 (SA - AS) + A_1 (SB - BS) \\ &= I + B_1 K_2 + A_1 K_3 = I + K_0 \end{aligned}$$

Rießscher Operator ist; denn infolge (2.4) ist $A_1 A + B_1 B = I$, $B_1 A + A_1 B = 0$ und K_2, K_3 sind vollstetig (Satz 9). Aus $U T_0' = I + K_0$ folgt zunächst, daß der Nullraum $\mathfrak{N}(T_0')$ von endlicher Dimension ist; andernfalls wäre auch der Nullraum $\mathfrak{N}(I + K_0)$ unendlichdimensional, was bekanntlich nicht eintreten kann. Daß $T_0'(\mathfrak{X})$ endliche Kodimension besitzt, sieht man so ein: Die Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}(T_0'^*)$, wo

$$T_0'^* = A^* + B^* S^* = A^* + B^* S - B^* K_1$$

und K_1 vollstetig ist (Satz 9), ergibt sich durch eine der vorangehenden völlig analoge Konstruktion als endlich und stimmt mit der Kodimension von $T_0'(\mathfrak{X})$ überein. Es bleibt zu zeigen, daß $T_0'(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1$ abgeschlossen ist. Aber nach der Rießschen Theorie ist $U T_0' = I + K_0$ Isomorphismus auf einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{X}_0$ endlicher Kodimension in $\mathfrak{X}$, daher $T_0'(\mathfrak{X}_0)$ und um so mehr $\mathfrak{X}_1$ abgeschlossen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. In der Theorie singulärer Integralgleichungen [*8*], [*14*], wird U wegen $U T_0' = I + K_0$ als *regularisierender Operator* für T_0' bezeichnet. U regularisiert daher auch $T_0' + K$ bei beliebigem vollstetigem K, speziell also $T_0 = T_0' - K_3$. GOCHBERG hat gezeigt [*8*], daß für die Regularisierbarkeit von T_0 die Bedingung (R) notwendig und hinreichend ist.

Nach Definition 2 besitzt T_0 einen Index $\varkappa(T_0)$. Wie man zeigen kann [*15*], gilt für diesen Index

$$\varkappa(T_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \log \frac{a(\zeta) - b(\zeta)}{a(\zeta) + b(\zeta)}.$$

Aus der Definition von $a_1(z), b_1(z)$ durch (2.4) entnimmt man, daß $U \in \Sigma$. Nach Satz 6 gilt daher $\varkappa(U) = -\varkappa(T_0)$.

Wir bezeichnen mit $(A)_0$ die zu (A) gehörige homogene Gleichung, mit (A_0) dieselbe Gleichung für $\lambda = 0$:

$$(A_0) \qquad a(z)\, \varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

und sind jetzt in der Lage, den Hauptsatz über die Lösbarkeit der Gl. (A) aufzustellen. Mit (A*), $(A^*)_0$ und (A_0^*) bezeichnen wir die zugehörigen adjungierten Gleichungen.

Satz 10. *Es sei für* (A) *die Regularitätsbedingung* (R) *erfüllt.*

Gl. (A) *besitzt eine Lösung* $\varphi(z) \in L^2(C)$, *wenn und nur wenn* $(\psi, \psi_0) = 0$ *für sämtliche Lösungen* ψ_0 *der adjungierten homogenen Gl.* $(A^*)_0$.

Die Maximalzahlen linear unabhängiger Lösungen sind für beide Gln. $(A)_0$ *und* $(A^*)_0$ *endlich.*

Mit möglicher Ausnahme einer Folge diskreter Werte $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ *des Parameters* λ *ohne Häufungspunkt im Endlichen sind die maximalen Anzahlen linear unabhängiger Lösungen von* $(A)_0$ *bzw.* $(A^*)_0$ *gleich zwei festen Zahlen* n *bzw.* m.

Die Differenz $\varkappa(\lambda)$ *dieser Anzahlen ist unabhängig von* λ: $\varkappa(\lambda) = \varkappa(0)$. *Insbesondere besitzen die Gln.* $(A)_0$ *bzw.* $(A^*)_0$ *stets mindestens* $\frac{1}{2}(|\varkappa| + \varkappa)$ *bzw.* $\frac{1}{2}(|\varkappa| - \varkappa)$ ***linear unabhängige Lösungen.***

Beweis. Auf Grund des Hilfssatzes und von Satz 5 ist $T_0 + \lambda K \in \Sigma$, wenn $T_0 + \lambda K$ die durch die linke Seite von (A) definierte Transformation bezeichnet. Daraus folgt sofort die [mit der Eigenschaft (N), s. **1**, identische] erste Aussage, ferner die zweite und nach Satz 8 auch die dritte Aussage. Satz 7 ergibt den ersten Teil der letzten Behauptung. Seien jetzt $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ (Def. 2) die Dimensionen der Nullräume $\mathfrak{N}(T_0 + \lambda K)$ bzw. $\mathfrak{N}(T_0^* + \lambda^* K^*)$. Dann gilt (Satz 7) $\varkappa(\lambda) = n(\lambda) - m(\lambda) = \varkappa(0)$, daher für $\varkappa \gtrless 0$: $n(\lambda) \gtrless \varkappa$. Entsprechendes gilt für die Adjungierte $T_0^* + \lambda^* K^*$, deren Index $\varkappa^* = -\varkappa$ ist: Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Da man beweisen kann [*15*], daß [unter der Voraussetzung (R)] entweder (A_0) oder (A_0^*) nur die triviale Lösung besitzt[14]), folgt aus dem Korollar zu Satz 8, daß die in Satz 10 erwähnten Zahlen n bzw. m mit den Nullösungsanzahlen von (A_0) bzw. (A_0^*) übereinstimmen. Satz 10 gilt hingegen auch für die allgemeinere Gleichung[15])

$$a(z)\,\varphi(z) + \int_C \left\{\frac{K(z,\zeta)}{\zeta - z} + \lambda\, k(z,\zeta)\right\} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \psi(z).$$

3. σ-Transformationen in lokalkonvexen Räumen

Wir erinnern an einige Begriffe aus der Theorie topologischer Vektorräume. Eine Menge $\mathfrak{E}$ heißt linearer topologischer Raum (l.t.R.) oder topologischer Vektorraum [*2*], wenn $\mathfrak{E} = \{x, y, \ldots\}$ freie abelsche Gruppe über einem bewerteten Körper $\mathfrak{K} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ ist, welcher eine topologische Struktur [*1*] aufgeprägt ist derart, daß die Abbildungen $(x, y) \to x + y$ von $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$ und $(\lambda, x) \to \lambda x$ von $\mathfrak{K} \times \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$ stetig sind. Ein l.t.R. heißt Hausdorffscher Raum (oder separiert [*1*]), wenn es zu verschiedenen Punkten stets punktfremde Umgebungen gibt. Wir betrachten nachfolgend ausschließlich Hausdorffsche Räume über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen[16]) (mit der üblichen Bewertung).

---

[14]) Es ist mir nicht gelungen, hierfür einen einfachen Beweis zu finden.

[15]) Hierbei genüge $K(z, \zeta)$ etwa einer Lipschitz-Bedingung in beiden Variablen.

[16]) Kommen mehrere l.t.R. in einem Gedankengang vor, so betrachten wir sie sämtlich über demselben Körper.

Sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ zwei l.t.R., so heißt eine Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ linear, wenn $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$ für alle $x,\ y\in\mathfrak{E}$ und $\alpha,\beta\in\mathfrak{K}$. Falls T eineindeutig ist, ist auch T^{-1} linear; der Ausdruck linear bezieht sich also nur auf die algebraischen Eigenschaften einer Abbildung[17]). Eine lineare Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ ist stetig, wenn das volle Urbild $T^{-1}(\mathfrak{O}')$ offen in $\mathfrak{E}$ ist für jede offene Menge $\mathfrak{O}'\subset\mathfrak{F}$. Sei T eine stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $T(\mathfrak{E})\subset\mathfrak{F}$: T heißt Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, wenn auch $T(\mathfrak{O})$ offen ist in $T(\mathfrak{E})$ [in der relativen, d.h. durch $\mathfrak{F}$ in $T(\mathfrak{E})$ induzierten, Topologie] für jede offene Menge $\mathfrak{O}\subset\mathfrak{E}$. Folglich ist jeder $1-1$-Homomorphismus ein linearer Homöomorphismus oder Isomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf $T(\mathfrak{E})$[18]). Endomorphismus heißt jeder Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in sich (d.h. auf einen Teilraum), Automorphismus jeder Isomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf sich[19]).

Teilraum $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{E}$ heißt jede (nicht notwendig abgeschlossene) Teilmenge, die linear ist, d.h. mit $x,\ y$ auch $\alpha x+\beta y$ ($\alpha,\beta\in\mathfrak{K}$ beliebig) enthält. Wir sagen, $\mathfrak{E}$ sei direkte (algebraische) Summe der Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}=\{\vartheta\}$ (ϑ das Nullelement von $\mathfrak{E}$) und jedes $z\in\mathfrak{E}$ in der Form $z=x+y$ ($x\in\mathfrak{M},\ y\in\mathfrak{N}$) (notwendigerweise eindeutig) darstellbar ist. Die linearen Abbildungen $z\to x=Pz$, $z\to y=Qz$ heißen Projektoren (von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$); offenbar ist $P+Q=I$ (I die identische Abbildung). $\mathfrak{E}$ heißt direkte topologische Summe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{E}$ algebraische Summe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und einer der Projektoren stetig ist (dann ist es auch der andere und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind abgeschlossen). Gleichwertig damit ist: $\mathfrak{E}$ ist direkte algebraische Summe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und homöomorph dem topologischen Produkt $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$[20]).

Ein l.t.R. ist lokalkonvex, wenn der Umgebungsfilter [1] des Nullelementes $\vartheta\in\mathfrak{E}$ eine aus konvexen Mengen bestehende Basis besitzt. Wir haben es im folgenden ausschließlich mit lokalkonvexen Räumen zu tun; für alle hier benötigten Begriffe s. auch [4]. Wir erwähnen noch das Hahn-Banachsche Theorem: Sei $\mathfrak{E}$ lokalkonvex, $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}$ ein abgeschlossener Teilraum, $p(x)$ eine (auf $\mathfrak{E}$) stetige Halbnorm, $f(x)$ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}$ mit $|f(x)|\leq p(x)$ für $x\in\mathfrak{M}$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f_1(x)$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$, die auf $\mathfrak{M}$ mit $f(x)$ übereinstimmt und für welche $|f_1(x)|\leq p(x)$ auf $\mathfrak{E}$.

Es seien $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ lokalkonvexe l.t.R. Die Menge $\mathfrak{E}^*$ aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$ heißt zu $\mathfrak{E}$ dualer Raum. Ist T eine stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so ist jedem $y^*\in\mathfrak{F}^*$ durch $(Tx,\ y^*)=(x,\ T^*y^*)$ ein-

[17]) Dieser Sprachgebrauch weicht von dem der polnischen Schule ab, nach welchem jede lineare Abbildung stetig ist.

[18]) Es ist also nicht jede lineare stetige Abbildung ein Homomorphismus, und nicht jeder $1-1$-Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in sich ein Automorphismus.

[19]) Unglücklicherweise werden die genannten Begriffe in durchaus verschiedenen Bedeutungen verwendet. Synonym zu den hier definierten Begriffen sind topologischer (oder offener) Homomorphismus, topologischer Isomorphismus. (In F-Räumen fallen nach einem Satz von BANACH einige dieser Begriffe zusammen [4].)

[20]) Die Situation ist hier ähnlich wie bei den Begriffen des vorigen Absatzes, vgl. Fußnote 19. Wir schreiben topologische Summen der größeren Deutlichkeit halber: $\mathfrak{E}=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$, obwohl sie im Hilbertschen Raum nicht notwendig orthogonal sind, vgl. Fußnote 3.

deutig ein $x^* = T^* y^* \in \mathfrak{E}^*$ zugeordnet, wenn unter (y, y^*) der Wert von $y^* \in \mathfrak{F}^*$ in $y \in \mathfrak{F}$ (und analog für $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*$) verstanden wird. T^* heißt die Adjungierte von T. Die (lineare) Menge $\mathfrak{E}^*$ kann auf vielfältige Weise mit einer lokalkonvexen Topologie versehen werden; wir gehen hierauf nicht ein. — Eine lineare stetige Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ heißt nach LERAY [13] vollstetig (kompakt), wenn für eine Nullumgebung $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{E}$ $T(\mathfrak{U})$ relativ kompakt [1] ist in $\mathfrak{F}$. Eine lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ heißt von endlichem Rang, wenn der Bildraum endliche Dimension besitzt. Jede stetige Abbildung endlichen Ranges ist vollstetig.

Um zeigen zu können, daß alle (in 1 bewiesenen) wesentlichen Eigenschaften verallgemeinerter Fredholmscher Operatoren auch in beliebigen lokalkonvexen Räumen erhalten bleiben, ersetzen wir Definition 1 durch die folgende

Definition 3. *Es seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ beliebige lokalkonvexe Räume. T heiße σ-Transformation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, wenn T ein Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ mit abgeschlossenem Bildraum endlicher Kodimension und endlich-dimensionalem Nullraum ist. Die Menge aller σ-Transformationen von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ werde mit $\Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ bezeichnet.*

Hieraus folgt: $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ besitzen Darstellungen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{E}_1, \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{U} \oplus T(\mathfrak{E}) \tag{3.2}$$

als direkte topologische Summen, wo $\mathfrak{N} = \{x : Tx = \vartheta\}$ den Nullraum (Kern) von T, $\mathfrak{U}$ einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Dies folgt aus der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{E})$ und der endlichen Dimension von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U}$. Da T Homomorphismus ist, ist T auch Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$.

Mit Hilfe des Hahn-Banachschen Theorems kann man zu $\mathfrak{N}(T)$ gehörige stetige Projektoren konstruieren. Sei $y_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $\mathfrak{N}(T)$; dann gibt es n Elemente x_ν^* aus $\mathfrak{E}^*$, so daß $(y_\mu, x_\nu^*) = \delta_{\mu\nu} (\mu, \nu = 1, \ldots, n)$. Die durch

$$Px = \sum_{\nu=1}^{n} (x, x_\nu^*)\, y_\nu$$

definierte lineare Transformation ist ein stetiger Projektor, und $\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{E}_1$ direkte topologische Summe von $\mathfrak{N} = P(\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{E}_1 = (I - P)\,\mathfrak{E}$. Besitzt eine stetige lineare Abbildung T des l.t.R. $\mathfrak{E}$ in den l.t.R. $\mathfrak{F}$ die Eigenschaft (N) (s. 1), so ist offenbar $T(\mathfrak{E})$ abgeschlossen. Aus Gründen der Vollständigkeit beweisen wir noch

Satz 11. *Seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ lokalkonvexe l.t.R. Für jede stetige lineare Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ ist die Eigenschaft* (N) *mit der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{E})$ äquivalent.*

Beweis. Wir haben nur zu beweisen, daß aus der Abgeschlossenheit von $T(\mathfrak{E})$ die Eigenschaft (N) folgt. Sei $\mathfrak{F} = T(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}$ direkte algebraische Summe. Sei weiter z^0 fest: $z^0 \in \mathfrak{Z}$, $z^0 \neq \vartheta$ $(T(\mathfrak{E}) \neq \mathfrak{F})$. Es genügt zu zeigen, daß ein

$y_0^* \in \mathfrak{F}^*$ existiert mit $T^* y_0^* = \vartheta$ und $(z^0, y_0^*) \neq 0$. Nun ist $\mathfrak{Y} = T(\mathfrak{E}) \oplus \{\lambda z^0\}$ abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{F}$, $f(y + \lambda z^0) = \lambda$ eine auf $\mathfrak{Y}$ stetige Linearfunktion, die sich nach HAHN-BANACH auf $\mathfrak{F}$ stetig fortsetzen läßt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Sind $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ F-Räume[4]), so ist jede stetige lineare Abbildung T von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ mit abgeschlossenem Bildraum endlichen Defekts und endlichem Kern σ-Transformation.

Denn nach einem bekannten Satz von BANACH ist jedes solche T Homomorphismus.

Korollar. *Jede σ-Transformation eines lokalkonvexen Raumes $\mathfrak{E}$ in einen lokalkonvexen Raum $\mathfrak{F}$ besitzt die Eigenschaft* (N)[21]).

Satz 12. *Es seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ beliebige lokalkonvexe Räume. Eine stetige lineare Abbildung T ist σ-Transformation von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, wenn und nur wenn zwei stetige lineare Abbildungen: R, S von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ existieren, für welche gilt:*

$$RT = I - L_1, \tag{3.3}$$

$$TS = I - L_2, \tag{3.4}$$

wo L_1 eine stetige lineare Abbildung endlichen Ranges von $\mathfrak{E}$ in sich, L_2 eine stetige lineare Abbildung endlichen Ranges von $\mathfrak{F}$ in sich ist. R, S können so gewählt werden, daß $R = S$ und L_1, L_2 (stetige) Projektoren sind.

Beweis. Die Bedingung ist *notwendig:* Nach Definition 3 hat man, wenn T σ-Transformation ist, für $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ die Darstellungen (3.1) bzw. (3.2), und T ist Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$. Sei $R_0 = T^{-1}$ auf $T(\mathfrak{E})$. Wir setzen $R = R_0(I - Q)$, wo Q die (stetige) Projektion von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}$ längs $T(\mathfrak{E})$ bezeichnet. Offenbar ist R stetig und (3.3) mit $L_1 = P$ erfüllt — P die zu (3.1) gehörige (ebenfalls stetige) Projektion von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{N}$. Analog beweist man (3.4): Wir setzen $S = R_0(I - Q)$ und haben $TS = I - L_2$ für $L_2 = Q$.

Die Bedingung ist *hinreichend:* Aus (3.3) folgt, daß der Kern $\mathfrak{N}(T)$ endlichdimensional ist und aus (3.4) die Endlichkeit des Defektes von $T(\mathfrak{E})$ in $\mathfrak{F}$. Offenbar ist $T(\mathfrak{E})$ abgeschlossen, denn $TS(\mathfrak{F})$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension [*13*]. Wir haben noch zu zeigen, daß T Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ ist. Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{E}_1$ direkte topologische Summe; dann ist T 1—1-lineare Abbildung von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$. Nun ist nach KÖTHE [*12*, Satz 7] $I - L_1$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in sich, während R $T(\mathfrak{E})$ stetig auf $(I - L_1)\mathfrak{E}$ abbildet. Sei jetzt $\mathfrak{O}_1$ eine beliebige offene Menge in $\mathfrak{E}_1$, dann ist $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O} \cap \mathfrak{E}_1$ für offenes $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{E}$. Also ist $(I - L_1)\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ offen in $(I - L_1)\mathfrak{E}$ und $T(\mathfrak{O}_1)$ homöomorph dem Produkt zweier offenen Mengen $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{N}(R) \cap T(\mathfrak{E})$, $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{M}$ $\left(\mathfrak{M} \oplus [\mathfrak{N}(R) \cap T(\mathfrak{E})] = T(\mathfrak{E})\right)$ — denn $I - L_1$ ist Isomorphismus von $T^{-1}(\mathfrak{M})$ auf $(I - L_1)\mathfrak{E}$ und R stetig —, also offen in $T(\mathfrak{E})$, daher T eine offene Abbildung von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von T ist aber auch T^{-1} offene Abbildung von $T(\mathfrak{E})$ auf $\mathfrak{E}_1$. Daher ist T Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$ und folglich Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, w.z.b.w.

[21]) Für diesen Satz wird wegen des endlichen Defekts von $T(\mathfrak{E})$ das Hahn-Banachsche Theorem nicht benötigt.

Wir erklären den Index $\varkappa(T)$ einer σ-Transformation wie in Definition 2 und erhalten die Aussagen: *Aus* $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, $S \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *folgt* $ST \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$ *und* $\varkappa(ST) = \varkappa(S) + \varkappa(T)$; $\Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ *ist eine Halbgruppe;* ferner: *Aus* $T_0 \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *folgt* $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *und* $\varkappa(T_0 + V) = \varkappa(T_0)$ für eine beliebige kompakte stetige lineare Abbildung V von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$[22]).

Satz 13. *Aus* $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, $S \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *folgt* $ST \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$ *und* $\varkappa(ST) = \varkappa(S) + \varkappa(T)$.

Beweis. Offenbar sind die Dimensionen des Kerns von ST und die Kodimension (Defekt) von $ST(\mathfrak{E})$ in $\mathfrak{G}$ endlich. Es bleibt zu zeigen, das ST Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ ist mit abgeschlossenem Bildraum. Sei

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{U} \oplus T(\mathfrak{E}) \tag{3.5}$$

direkte topologische Summe. Da $\mathfrak{N}(S)$ endliche Dimension besitzt und $S(\mathfrak{F})$ abgeschlossen ist, ist auch $ST(\mathfrak{E}) = SP(\mathfrak{F})$ abgeschlossen. Bedeutet nämlich P den zu (3.5) gehörigen stetigen Projektor von $\mathfrak{F}$ auf $T(\mathfrak{E})$, so ist ersichtlich $SPT = ST$; und $SP = S(I - Q) = S - SQ$ ($Q = I - P$ stetiger Projektor von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}$) ist nach [*12*, Satz 7] ein (auf $\mathfrak{U}$ verschwindender) Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$, also auch Homomorphismus von $T(\mathfrak{E})$ in $\mathfrak{G}$ mit abgeschlossenem Bildraum. Sei nun $\mathfrak{O}$ eine beliebige offene Menge in $\mathfrak{E}$; dann ist, da $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, $\mathfrak{O}' = T(\mathfrak{O})$ offen in $T(\mathfrak{E})$ und folglich $ST(\mathfrak{O}) = SP(\mathfrak{O}')$ offen in $ST(\mathfrak{E})$, d.h. ST Homomorphismus von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$, w.z.b.w.

Ersetzt man im Beweis von Satz 6 das orthogonale Komplement eines Teilraumes jeweils durch ein topologisches Komplement, was für σ-Transformationen stets möglich ist (alle vorkommenden Teilräume sind von endlicher Dimension oder Kodimension), so überträgt sich dieser Beweis wörtlich auf den vorliegenden Fall (vgl. Satz 11, Korollar).

Ein bemerkenswertes Gegenstück zu Satz 13 bildet

Satz 14. *Es seien* R *bzw.* S *stetige lineare Abbildungen von* $\mathfrak{E}$ *in* $\mathfrak{F}$ *bzw.* $\mathfrak{F}$ *in* $\mathfrak{G}$, *wo* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ *beliebige lokalkonvexe Räume bedeuten mögen. Ist dann* $T = RS$ σ*-Transformation von* $\mathfrak{E}$ *in* $\mathfrak{G}$: $T \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$, *so sind entweder beide Relationen:* $R \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ und $S \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *erfüllt oder beide nicht erfüllt.*

Beweis. Wir haben zu zeigen: a) *Aus* $R \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *folgt* $S \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ und b) *aus* $S \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ *folgt* $R \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

a) Da der Kern $\mathfrak{N}(T)$ endlichdimensional ist, gilt das Gleiche für $\mathfrak{N}(S)$. Ferner ist für $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}(T) \oplus \mathfrak{E}_1$, $S(\mathfrak{E}_1) + \mathfrak{N}(R)$ abgeschlossen in $\mathfrak{F}$ wegen der Stetigkeit von R. $T = RS$ ist Isomorphismus von $\mathfrak{E}_1$ auf $T(\mathfrak{E})$, also $S\overline{(\mathfrak{E}_1)} \cap \mathfrak{N}(R) = \{\vartheta\}$ und $S(\mathfrak{E}_1)$ abgeschlossen; um so mehr ist $S(\mathfrak{E}) = S(\mathfrak{E}_1) + S[\mathfrak{N}(T)]$ abgeschlossen in $\mathfrak{F}$. Wir zeigen, daß $S(\mathfrak{E})$ endliche Kodimension besitzt. Wir setzen $\mathfrak{M} = S(\mathfrak{E}) + \mathfrak{N}(R)$; $\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{F}$. Sei $\mathfrak{B}$ ein algebraisches Komplement von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$. Dann ist $\mathfrak{B} \to R(\mathfrak{B})$ 1 — 1-Abbildung und $T(\mathfrak{E}) \cap R(\mathfrak{B}) = \{\vartheta\}$. Da $T(\mathfrak{E})$ endliche Kodimension besitzt in $\mathfrak{G}$, ist $R(\mathfrak{B})$, also auch $\mathfrak{B}$ endlichdimensional. Daher besitzt $S(\mathfrak{E})$ endlichen Defekt, denn $\mathfrak{N}(R)$ ist

[22]) Für Stabilitätsaussagen gegenüber Addition vollstetiger Transformationen unter anderen Voraussetzungen s. Schwartz [*18*] und Köthe [*12*, Sätze 7—9].

endlichdimensional nach Voraussetzung. Wir müssen noch zeigen, daß S offene Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $S(\mathfrak{E})$ ist. Sei $\mathfrak{O}_1 < \mathfrak{E}_1$ eine beliebige offene Menge; dann ist $T(\mathfrak{O}_1)$ offen in $T(\mathfrak{E})$ (nach Voraussetzung). Weiter ist R stetige $1-1$-Abbildung von $S(\mathfrak{E}_1)$ auf $T(\mathfrak{E})$, daher $R^{-1}[T(\mathfrak{O}_1)] = S(\mathfrak{O}_1)$ offen in $S(\mathfrak{E}_1)$, folglich S auch offene Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $S(\mathfrak{E})$, w.z.b.w.

b) Da $T(\mathfrak{E})$ endlichen Defekt in $\mathfrak{G}$ besitzt, gilt dies auch von $R(\mathfrak{E}_2)$, $\mathfrak{E}_2 = S(\mathfrak{E})$, um so mehr also von $R(\mathfrak{F})$. Ferner ist $R(\mathfrak{E}_2) = T(\mathfrak{E})$ abgeschlossen nach Voraussetzung und $\mathfrak{F} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{E}_2$ mit endlichdimensionalem $\mathfrak{U}$. Daher ist $R(\mathfrak{F})$ abgeschlossen in $\mathfrak{G}$. Weiter ist $\mathfrak{N}(R) \cap S(\mathfrak{E})$ endlichdimensional, weil dies für $\mathfrak{N}(T)$ gilt. Aber $S(\mathfrak{E})$ hat endlichen Defekt, daher $\mathfrak{N}(R)$ endliche Dimension. Es bleibt noch zu zeigen: R ist offene Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf $R(\mathfrak{F})$. Sei Q die stetige Projektion von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{U}$ längs $\mathfrak{E}_2$ (s. oben), dann ist $R_0 = R(I-Q)$ eine auf $\mathfrak{U}$ verschwindende lineare Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf $T(\mathfrak{E})$. Nun ist R_0 Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$: Sei $\mathfrak{O}'$ offen in $S(\mathfrak{E})$. Dann ist $\mathfrak{O} = S^{-1}(\mathfrak{O}')$ offen in $\mathfrak{E}$, und $T(\mathfrak{O})$ offen in $T(\mathfrak{E})$. Daher ist $R_0(\mathfrak{O}_1) = R_0(\mathfrak{O}') = T(\mathfrak{O})$ offen in $T(\mathfrak{E})$ für beliebiges offenes $\mathfrak{O}_1 \in \mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{O}_1 \cap S(\mathfrak{E}) = \mathfrak{O}'$, und $\mathfrak{O}'$ war beliebig. Also ist R_0 Homomorphismus mit endlichdimensionalem Kern und abgeschlossenem Bildraum, und nach [*12*, Satz 7] gilt das Gleiche für $R = R_0 + RQ$, w.z.b.w.

Satz 15. *$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ seien beliebige lokalkonvexe Räume. Ist $T_0 \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ und V eine beliebige kompakte stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so ist $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ und $\varkappa(T_0 + V) = \varkappa(T_0)$.*

Beweis. Nach Satz 12 haben wir für stetige lineare Abbildungen R, S von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ und stetige Abbildungen endlichen Ranges L_1 bzw. L_2 von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in sich:

$$R(T_0 + V) = I + RV - L_1, \qquad (T_0 + V)\, S = I + VS - L_2$$

Aber $RV - L_1 = V_1$ bzw. $VS - L_2 = V_2$ sind vollstetige Abbildungen in $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$, daher $R(T_0 + V) \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ und $(T_0 + V)\, S \in \Sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ [*13*], [*22*][23]). Folglich existieren nach Satz 12 zwei stetige Abbildungen R_1 bzw. S_1 von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in sich, so daß mit stetigen Abbildungen endlichen Ranges L_3 bzw. L_4 von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ in sich gilt:

$$R_1(I + V_1) = I - L_3, \qquad (I + V_1)\, S_1 = I - L_4.$$

Daher haben wir auch $R_2(T_0 + V) = I - L_3$, $(T_0 + V)\, S_2 = I - L_4$ für $R_2 = R_1 R$ und $S_2 = S S_1$. Dies ist (wieder nach Satz 12) aber für $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ hinreichend. Zum Beweis der Indexrelation benutzen wir jetzt, daß (Satz 14) die Hilfsabbildungen R, R_1, R_2 und S, S_1, S_2 sämtlich σ-Transformationen sind. Es gilt nach Satz 13

$$\varkappa[R(T_0 + V)] = \varkappa(R) + \varkappa(T_0 + V) = \varkappa(I + V_1) = 0$$
$$\varkappa(RT_0) = \varkappa(R) + \varkappa(T_0) = \varkappa(I + V_1 + RV) = 0.$$

Hierbei ist $\varkappa(I + V_1) = \varkappa(I + V_1 + RV) = 0$ [*13*]. Damit ist der Satz bewiesen.

[23]) Aus jeder dieser Relationen folgt nach Satz 14 bereits $T_0 + V \in \Sigma(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, wenn man berücksichtigt, daß (nach dem gleichen Satz) auch R, S σ-Transformationen sein müssen.

Literatur

(Die mit einem * versehenen Arbeiten sind in russischer Sprache geschrieben)

[1]* Atkinson, F. V.: Normale Auflösbarkeit linearer Gleichungen in normierten Räumen. Mat. Sbornik **28** (70), 1, 3—14 (1951). — [2] Atkinson, F. V.: On relatively regular operators. Acta Scient. Math. **15**, 38—56 (1953/54). — [3] Bourbaki, N.: Éléments de math.: Topologie générale, chap. I, II. Act. sci. industr. 858 (Paris 1951). — [4] Bourbaki, N.: Éléments de math.: Espaces vectoriels topologiques, chap. I, II. Act. sci. industr. 1189 (Paris 1953). — [5] Carleman, T.: Sur la résolution de certaines équations intégrales. Ark. för mat., astr. och fys. **16**, Nr. 26 (1922). — [6] Giraud, G.: Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application. Ann. Éc. Norm. Sup. **51**, 251—372 (1934). — [7] Giraud, G.: Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples. Ann. Ec. Norm. Sup. **56**, 119—172 (1939). — [8]* Gochberg, I. Z.: Über eine Anwendung der Theorie normierter Ringe auf singuläre Integralgleichungen. Uspechi Mat. Nauk SSSR **13**, 163—176 (1949). — [9] Graves, L. M.: A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations. Trans. Amer. M. S. **79**, 141—149 (1955). — [10]* Halilov, S. J.: Lineare singuläre Gleichungen in normierten Ringen. Isv. Akad. Nauk SSSR **13**, 163—176 (1949). — [11] Hausdorff, F.: Zur Theorie der linearen metrischen Räume. Crelles J. **167**, 294—311 (1932). — [12] Köthe, G.: Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen. Portug. Math. **13** (3), 97—104 (1954). — [13] Leray, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Scient. Math. **12**B, 177—186 (1950). — [14]* Michlin, S. G.: Singuläre Integralgleichungen. Uspechi Mat. Nauk **3** (3), 29—112 (1948). — [15] Muskhelishvili, N. I.: Singular integral equations. Groningen 1953. — [16]* Nikolskij, S. M.: Lineare Gleichungen in normierten linearen Räumen. Isv. Akad. Nauk SSSR, Math. Ser. **7** (3), 147—166 (1943). — [17] Noether, F.: Über eine Klasse von singulären Integralgleichungen. Math. Ann. **82**, 42—63 (1921). — [18] Schwartz, L.: Homomorphismes et applications completement continues. C. R. Acad. Sci. Paris **236**, 2472—2473 (1953). — [19] Söhngen, H.: Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation. Math. Z. **60**, 31—51 (1954). — [20] Sz.-Nagy, B.: On the stability of the index of unbounded linear transformations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **3** (3), 49—51 (1952). — [21]* Vecoua, N. P.: Systeme singulärer Integralgleichungen. Moskau 1950. — [22] Williamson, J. H.: Compact linear operators in linear topological spaces. J. London math. Soc. **29**, 149—156 (1954). — [23] Zygmund, A., and A. P. Calderon: On the existence of certain integrals. Acta math. **88**, 85—139 (1952).

Leipzig, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. Mai 1956)

Kasch, F.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 164—172 (1956)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen

(III. Mitteilung)

Von

Friedrich Kasch

§ 1. Ergebnisse

1. In den zwei vorangehenden Mitteilungen mit dem gleichen Titel [2], [3][1]) habe ich Abschätzungen der Dichte von Summenmengen aufgestellt, wobei vorausgesetzt wurde, daß einer der Summanden eine positive Dichte besitze und der andere eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen sei. Inzwischen erschien eine Arbeit von A. Brauer [1][2]), in der sich dieser mit demselben Problem beschäftigt und dabei zu folgendem Ergebnis gelangt:

Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte

$$\alpha \leq \tfrac{1}{2}, \tag{1}$$

und ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung

$$\lambda \geq \tfrac{3}{2}, \tag{2}$$

dann gilt für die Dichte γ der Summenmenge[3]) $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *die Abschätzung*

$$\gamma \geq \alpha + \tfrac{1}{2}\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\}.$$

Es erhebt sich die Frage, in welcher Beziehung dieses Ergebnis und sein Beweis zu den Abschätzungen und der Schlußweise aus I und II stehen.

Wie im folgenden gezeigt werden soll, kann auf der Grundlage von I und II unter schwächeren Voraussetzungen — insbesondere unter Vermeidung von (1) und Abschwächung von (2) — ein schärferes Ergebnis bewiesen werden. Dabei stellt außerdem — wie ich glaube — der hier mitgeteilte Beweis eine Vereinfachung gegenüber dem Beweis in [1] dar und ist auch abgesehen von der dadurch erzielten Verbesserung von Interesse. Im einzelnen sollen hier die folgenden Sätze bewiesen werden.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α, ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung λ und gilt*

$$\lambda \geq \frac{3 + \alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)^2}{2(3-2\alpha)}, \tag{3}$$

[1]) Wir zitieren im folgenden [2] bzw. [3] durch I bzw. II. Es werden die gleichen Bezeichnungen und Definitionen wie in I und II benutzt.

[2]) Diese Arbeit wurde ohne Kenntnis von I und II abgefaßt.

[3]) Bei A. Brauer [1] wird nicht $0 \in \mathfrak{B}$ vorausgesetzt, jedoch die Summenmenge als Menge aller $a + e\,b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ und $e = 0$ oder 1 erklärt, was offenbar die gleiche Summenmenge $\mathfrak{C}$ liefert.

dann besteht für die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$\gamma \geq \alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}. \tag{4}$$

Ersetzt man (3) durch eine stärkere Voraussetzung, dann kann (4) verschärft werden. Dies besagt

Satz 2. *Gilt in Satz 1 an Stelle von* (3)

$$\lambda \geq \frac{6 + 39\alpha - 38\alpha^2 + 8\alpha^3}{2(3-2\alpha)(2+3\alpha-2\alpha^2)}, \tag{5}$$

dann besteht die Abschätzung

$$\gamma \geq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}. \tag{6}$$

Wie man leicht feststellt, sind die in (3) und (5) rechts stehenden Ausdrücke als Funktionen von α für $0 \leq \alpha \leq 1$ monoton wachsend. Daher ergibt sich sofort, daß für $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ Voraussetzung (3) überhaupt keine Beschränkung für λ bedeutet, während (5) $\lambda \geq 1\frac{7}{12}$ nach sich zieht, was bereits günstiger als (2) ist. Für $0 \leq \alpha \leq 1$ liefert (3) im ungünstigsten Fall (für $\alpha = 1$) die Schranke $\lambda \geq \frac{3}{2}$ und (5) $\lambda \geq 1\frac{5}{6}$.

Ersetzt man die finiten durch die asymptotischen Begriffe (im Sinne von I und II), dann besteht der folgende Satz.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der asymptotischen Dichte α^*, und ist $\mathfrak{B}$ eine asymptotische Basis der asymptotischen mittleren Ordnung λ^*, dann gilt für die asymptotische Dichte γ^* der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Abschätzung*

$$\gamma^* \geq \alpha^* + \frac{1}{2}\left\{\lambda^* - \frac{\alpha^*}{4} - \sqrt{\left(\lambda^* - \frac{\alpha^*}{4}\right)^2 - 3\alpha^*(1-\alpha^*)}\right\}.$$

2. In I waren die Abschätzungen

$$\begin{cases} \gamma \geq \alpha\left(1 + c(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right), \quad \gamma \geq \alpha\left(1 + c(1-\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right) \\ \text{mit} \\ c(\alpha) = \dfrac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \end{cases} \tag{7}$$

bewiesen worden. Dabei ist die erste Abschätzung für $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ und die zweite für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ besser. Wie man leicht nachrechnet, ist (4) dann und nur dann besser als (7), wenn [außer (3)]

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 + \sqrt{\alpha} + \alpha\right) \qquad \text{für} \quad 0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{2}$$

bzw.

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(1 + \sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha\right) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

gilt. Da die rechts stehenden Funktionen von α monoton zunehmend bzw. abnehmend sind und für $\alpha = \frac{1}{2}$ den Wert $3 + \sqrt{2}$ annehmen, ist folglich (4)

dann und nur dann besser als (7), wenn $\lambda < 3 + \sqrt{2} = 4{,}4\ldots$ gilt und α hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ liegt. Entsprechend stellt man fest, daß (6) dann und nur dann besser als (7) ist, falls [außer (5)] $\lambda < 13{,}2\ldots$ gilt und α hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ liegt.

3. Man wird sich fragen, ob die in dieser und den vorhergehenden Arbeiten aufgestellten Abschätzungen in der Nähe der bestmöglichen derartigen Abschätzung liegen. Es soll hier gezeigt werden, daß sie jedenfalls für mittlere Werte von α (d.h. α in der Nähe von $\frac{1}{2}$) nicht „wesentlich" von der bestmöglichen Abschätzung abweichen. Setzt man die Abschätzung in der Form

$$\gamma - \alpha \geq c\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \tag{8}$$

an, wobei $c = c(\alpha)$ eine stetige Funktion von α sei, dann gilt, wie sogleich gezeigt werden soll, notwendig

$$c \leq \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{9}$$

Das liefert für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Bedingung $c \leq 2$, während die bisherigen Abschätzungen für $\alpha = \frac{1}{2}$ und beliebiges λ bereits $c > \frac{3}{4}$ ergeben.

Die Schranke (9) wird durch das folgende Beispiel geliefert. Es seien

$$\mathfrak{A} = \{1, 2, \ldots, rn, sn+1, sn+2, sn+3, \ldots\},$$
$$\mathfrak{B} = \{0, 1, sn+1, sn+2, sn+3, \ldots,$$

wobei n, r, s beliebige natürliche Zahlen mir $r < s$ sind; dann gilt

$$\alpha = \frac{r}{s}, \quad \gamma = \frac{rn+1}{sn} = \alpha + \frac{1}{sn}, \quad \lambda = \frac{sn+1}{2}.$$

Aus (8) ergibt sich damit

$$c \leq \frac{sn+1}{2sn\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{2sn\alpha(1-\alpha)},$$

und da diese Beziehung für jedes natürliche n gilt, folgt (9).

Eine entsprechende Aussage besteht auch für die asymptotischen Begriffe, wie das folgende Beispiel zeigt: Es seien mit natürlichen Zahlen $r < s$ und $n \geq 2$

$$\mathfrak{A} = \{sn^{3^i}+1,\ sn^{3^i}+2, \ldots, rn^{3^{i+1}};\ i = i_0, i_0+1, \ldots\}^{4}),$$
$$\mathfrak{B} = \{sn^{3^i}+1,\ sn^{3^i}+2, \ldots, sn^{3^{i+1}-1};\ i = 0, 1, \ldots\};$$

dann gilt, wie man leicht nachrechnet

$$\alpha^* = \frac{r}{s}, \quad \gamma^* = \alpha^* + \frac{1}{n}, \quad \lambda^* = \frac{n+1}{2}.$$

Daraus folgt wieder $c(\alpha^*) \leq \frac{1}{2\alpha^*(1-\alpha^*)}$, wenn $c(\alpha^*)$ stetig vorausgesetzt wird und der Ungleichung $\gamma^* - \alpha^* \geq c(\alpha^*)\,\frac{\alpha^*(1-\alpha^*)}{\lambda^*}$ genügen soll.

---

[4]) i_0 ist in Abhängigkeit von r und s so groß zu wählen, daß diese Kennzeichnung von $\mathfrak{A}$ sinnvoll ist.

§ 2. Beweise

1. Da die Beweise von Satz 1 und Satz 2 nahezu analog verlaufen, soll nur der Beweis von Satz 2 vollständig ausgeführt werden. Auf den Beweis von Satz 1 geben wir lediglich einige Hinweise. Statt Satz 2 beweisen wir sogleich die folgende Aussage:

Satz 2a. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α mit $0<\alpha<1$, ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der endlichen mittleren Ordnung λ und gilt* (5), *dann genügt die Anzahlfunktion $C(n)$ der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ für jede natürliche Zahl n der Abschätzung*

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}.$$

Darin wird das Gleichheitszeichen höchstens dann angenommen, wenn dies in (5) *gilt.*

Daß aus dieser Aussage Satz 2 folgt, ist unmittelbar klar, wenn man noch beachtet, daß Satz 2 für $\alpha=0$ und $\alpha=1$ trivialer Weise gültig ist.

2. Abweichend von der bisherigen Schreibweise, verstehen wir jetzt unter α eine feste reelle Zahl mit $0<\alpha<1$. Ferner sei $(A+B)(n)$ die Anzahlfunktion der Summenmenge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$. In Abänderung des Reduktionssatzes aus II[5]) gilt der folgende

Reduktionssatz. *Es sei $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende fest vorgegebene Menge*[6]), *und es seien α und $\varkappa$ reelle Zahlen. Besteht dann für alle Mengen $\mathfrak{A}$ und alle natürlichen Zahlen n, die*

$$\frac{A(i)}{i} \geqq \alpha, \quad i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

und

$$\min_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n}, \tag{12}$$

$$\min_{i=1,\ldots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(n)}{n} \tag{13}$$

genügen, die Ungleichung

$$\frac{(A+B)(n)}{n} > \varkappa, \tag{14}$$

dann gilt diese für alle Mengen $\mathfrak{A}$ und natürliche Zahlen n, die nur (11) *allein genügen. Diese Aussage bleibt richtig, wenn in* (14) *an Stelle von $>$ das Zeichen $\geqq$ steht.*

Beweis. Induktion nach n. Für $n=1$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung, denn dann folgen (12) und (13) aus (11). Sie sei bis $n-1$ bewiesen [und zwar für alle Mengen $\mathfrak{A}$, die $A(i)\geqq\alpha i$, $i=1,\ldots,n-1$ genügen]. Sei $\mathfrak{A}$

[5]) Der Reduktionssatz aus II ist zum Beweis der vorliegenden Behauptung nicht zu verwenden, weil die behauptete Abschätzung (6) bei festem λ wegen (5) nicht für alle Mengen $\mathfrak{A}$ bewiesen werden kann.

[6]) Unter einer Menge wollen wir im folgenden stets eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen verstehen.

eine beliebige Menge, die (11) erfüllt; gelten dafür die Bedingungen (12) und (13), so ist nichts zu beweisen. Sei zunächst (13) nicht erfüllt, d.h. sei

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(m)}{m} < \frac{(A+B)(n)}{n};$$

dann folgt die Behauptung auf Grund der Tatsache, daß sie für m bereits gilt. Sei nun (12) nicht erfüllt, d.h. sei

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(m)}{m} < \frac{A(n)}{n};$$

dann betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{A}_m = \{a - m;\ a \in \mathfrak{A},\ a > m\}.$$

Für diese gilt offenbar

$$A_m(r) = A(r+m) - A(m) \geq A(m)\left\{\frac{r+m}{m} - 1\right\} \geq \alpha r, \qquad r = 1, \dots, n-m.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist daher

$$(A_m + B)(n-m) > \varkappa(n-m), \tag{15}$$

bzw.

$$(A_m + B)(n-m) \geq \varkappa(n-m),$$

falls in (14) das Zeichen $\geq$ steht. Liegt eine natürliche Zahl $r \leq n-m$ in $\mathfrak{A}_m + \mathfrak{B}$, so liegt $r+m$ in $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$. und zwar im Intervall $m < r+m \leq n$, also gilt

$$(A_m + B)(n-m) \leq (A+B)(n) - (A+B)(m). \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung für $\mathfrak{A}$ und m die Behauptung.

Wie unmittelbar zu sehen, folgt auf Grund dieses Reduktionssatzes Satz 2a aus

Satz 2b. *Es seien $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der mittleren Ordnung $\lambda < \infty$ und α eine (5) genügende reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$. Dann gilt für jede Menge $\mathfrak{A}$ und jede natürliche Zahl n mit*

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n} \geq \alpha, \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(n)}{n} \tag{17}$$

die Ungleichung

$$\frac{(A+B)(n)}{n} \geq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\} \tag{18}$$

Darin wird das Gleichheitszeichen höchstens dann angenommen, wenn dies in (5) gilt.

3. Dieser Satz wird nun bewiesen. In I und II hatten wir zwei Funktionen benutzt, die in bezug auf eine feste natürliche Zahl n und eine feste Menge

$\mathfrak{P}$ folgendermaßen definiert waren:

$D(m)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente $p \in \mathfrak{P}$ mit $p+m \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$;

$E(m)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente $p \in \mathfrak{P}$ mit $p+m \in \mathfrak{P}(n)$.

Diese Funktionen werden im folgenden (bei festem n) für verschiedene Mengen $\mathfrak{P}$ benutzt; zur Unterscheidung wird jeweils die zugrunde gelegte Menge als Index angehängt, also z.B. $D_{\mathfrak{A}}(m)$, $E_{\mathfrak{R}}(m)$. Seien ferner $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{C} \cap \overline{\mathfrak{A}}$; dann gilt wegen $0 \in \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ offenbar $R(m) = C(m) - A(m)$, $(m = 1, 2, \ldots)$.

Von A. Brauer[7]) übernehmen wir den folgenden

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{B}$ *eine die* 0 *enthaltende Basis der mittleren Ordnung* λ, *dann gilt für jede natürliche Zahl* $k \leq n$:

$$\lambda k R(n) - \sum_{m=1}^{k} \left(E_{\mathfrak{R}}(m) + R(m)\right) \geq \sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m). \tag{19}$$

In I (und II) hatten wir die Beziehung

$$\sum_{m=1}^{k} E_{\mathfrak{R}}(m) = \binom{R(n)}{2} - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{R(m+k+1) - R(m+k)\right\}$$

bewiesen[8]). Wir setzen nun

$$2k \geq n-1 \tag{20}$$

voraus. Dann gilt

$$\sum_{m=1}^{k} R(m) - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{C(m+k+1) - C(m+k)\right\} \geq 0,$$

womit aus (19) folgt:

$$\lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\} \geq \sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m).$$

Wie bereits in I gezeigt, gilt als Abschätzung nach unten

$$\sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m) \geq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen zusammen liefern

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} \\ \geq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum_{m=1}^{n-k-1} C(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\}. \end{array}\right. \tag{21}$$

Zum Beweis von Satz 1 benutzt man stattdessen die Ungleichung, die man hieraus erhält, wenn man rechts in der Summe $C(m)$ durch $A(m)$ ersetzt.

[7]) Siehe [1], Formel (23).

[8]) Siehe I, Hilfssatz 2; daß hier $\mathfrak{R}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$ in I steht, spielt beim Beweis von Hilfssatz 2 keine Rolle; dieser gilt für beliebige Mengen.

Wir setzen jetzt (17) voraus und schreiben im folgenden zur Abkürzung

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n} = \alpha', \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\dots,n} \frac{C(i)}{i} = \frac{C(n)}{n} = \gamma, \quad \gamma - \alpha' = \varrho', \quad \gamma - \alpha = \varrho,$$

so daß insbesondere $R(n) = \varrho' n$ ist.

Aus (21) folgt nach dem Vorbild in I, indem man auf der rechten Seite $C(m)$ durch γm abschätzt und dann auf die Summe Abelsche Summation ausübt:

$$(22)\quad \lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} \geq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(m)}{2} + \gamma \Big\{ (n-k-1) A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) \Big\}.$$

4. Wir setzen jetzt im Einklang mit (20) $k = [n/2]$ und unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.

n gerade: Jetzt ist $k = \frac{n}{2}$, $n - k = \frac{n}{2}$, $k + 1 = \frac{n}{2} + 1$.

Daher folgt aus (22)

$$(23)\quad \lambda \tfrac{n}{2} R(n) - \binom{R(n)}{2} \geq (1-\gamma) \sum_{m=n,2}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \gamma \binom{n}{2} - 1 A(n) + \gamma A\binom{n}{2}.$$

Setzt man

$$\delta_m = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad m+1 \in \mathfrak{A} \\ 1 & \text{falls} \quad m+1 \in \overline{\mathfrak{A}}, \end{cases}$$

dann gilt offenbar

$$A(m) = A(m + \delta_m), \qquad \sum_{m=l}^{n-1} \delta_m = \bar{A}(n) - \bar{A}(l).$$

Daraus folgt

$$\sum_{m=n/2}^{n-1} A(m) \geq \alpha' \sum_{m=n/2}^{n-1} (m + \delta_m) \geq \alpha' \left(\tfrac{3}{2} n - 1 \right) \tfrac{n}{4} + \alpha' (1 - \alpha') \tfrac{n}{2}.$$

Geht man damit in (23) ein, so ergibt sich

$$(24)\quad \lambda \varrho' - \varrho'^2 - \tfrac{\alpha'}{4} \varrho' \geq \tfrac{3}{4} \alpha' (1-\alpha') + \tfrac{1}{2n} \{ \alpha' (1-\alpha')(3-2\alpha') - \varrho' (2 + 3\alpha' - 2\alpha'^2) \}.$$

Beim Beweis von Satz 1 hat man statt dessen die Ungleichung

$$(25)\quad \lambda \varrho' - \varrho'^2 \geq \tfrac{3}{4} \alpha' (1-\alpha') + \tfrac{1}{2n} \{ \alpha' (1-\alpha')(3-2\alpha') - 2\varrho' \}.$$

5. Wir wollen jetzt feststellen, daß man in (24) überall α' durch α ersetzen kann, wobei nach Voraussetzung $\alpha' \geq \alpha$ gilt. Das ist erlaubt, falls die Ableitung der linken Seite nach α' kleiner oder gleich der der rechten Seite ist, d.h. falls

$$(26)\quad -\lambda + \tfrac{7}{4}\gamma - \tfrac{3}{2}\alpha' \leq \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{2}\alpha' + \tfrac{1}{2n} \{ 5 - 7\alpha' + 4\alpha'^2 - \varrho' (3 - 4\alpha') \}$$

gilt. Nun ist aber wegen $\lambda \geq 1$

$$\tfrac{7}{4}\gamma \leq \lambda + \tfrac{3}{4}$$

und

$$5-7\alpha'+4\alpha'^2-\varrho'(3-4\alpha') \geqq \begin{cases} 2-3\alpha'+4\alpha'^2>0 & \text{für } \alpha' \leqq \frac{3}{4} \\ 5-7\alpha'+4\alpha'^2>0 & \text{für } \alpha' \geqq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

woraus (26) folgt. Aus (24) erhält man also

$$(27)\quad \lambda\varrho-\varrho^2-\frac{\alpha}{4}\varrho \geqq \frac{3}{4}\alpha(1-\alpha)+\frac{1}{2n}\{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)-\varrho(2+3\alpha-2\alpha^2)\}.$$

Beim Beweis von Satz 1 hat man statt (26)

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha') \leqq \frac{3}{4}-\frac{3}{2}\alpha'+\frac{1}{2n}\{5-10\alpha'+6\alpha'^2\}$$

zu beweisen. Wegen $5-10\alpha'+6\alpha'^2>0$ ist dies richtig, falls

$$2\gamma \leqq \lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha'}{2}$$

gilt. Für $\gamma \leqq \frac{7}{8}$ ist dies unmittelbar klar. Ist $\gamma-\alpha \geqq \frac{1}{4}$, so gilt wegen

$$\frac{1}{4} \geqq \frac{1}{2}\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\}$$

die Behauptung $\gamma-\alpha \geqq \frac{1}{2}\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\}$. Sei also $\gamma>\frac{7}{8}$ und $\gamma<\frac{1}{4}+\alpha$, d.h. $\frac{5}{8}<\alpha$. Dann gilt

$$2\gamma \leqq 2 \leqq \lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{2} \leqq \lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha'}{2}$$

für alle $\alpha' \geqq \alpha$. Aus (25) folgt daher

$$(28)\qquad \lambda\varrho-\varrho^2 \geqq \frac{3}{4}\alpha(1-\alpha)+\frac{1}{2n}\{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)-2\varrho\}.$$

6. Jetzt wird die Voraussetzung (5) benutzt, um zu zeigen, daß die in (27) rechts stehende geschweifte Klammer positiv ist oder aber (18) gilt. Angenommen, diese Klammer wäre nicht positiv, d.h. es gelte

$$\varrho \geqq \frac{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2+3\alpha-2\alpha^2};$$

dann folgt (18) sofort aus der Tatsache, daß (5) äquivalent mit

$$\frac{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2+3\alpha-2\alpha^2} \geqq \frac{1}{2}\left\{\lambda-\frac{\alpha}{4}-\sqrt{\left(\lambda-\frac{\alpha}{4}\right)^2-3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

ist, was man leicht nachrechnet. Aus (28) folgt also

$$(29)\qquad \lambda\varrho-\varrho^2-\frac{\alpha}{2}\varrho>\frac{3}{4}\alpha(1-\alpha),$$

oder (18) ist erfüllt. Aus (29) folgt aber ebenfalls wieder (18) (mit dem Zeichen $>$), so daß (18) für jedes gerade n gilt.

Analog schließt man unter Verwendung von (3) beim Beweis von Satz 1.

7. *n ungerade.* Jetzt ist $k=\frac{n-1}{2}$, $n-k=k+1=\frac{n+1}{2}$. Daher folgt jetzt aus (22)

$$\lambda\frac{n-1}{2}R(n)-\binom{R(n)}{2}\geqq(1-\gamma)\sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n-1}A(m)-\binom{A(n)}{2}+\gamma\frac{n-1}{2}A(n).$$

Durch die gleiche Schlußweise wie bei geradem n erhält man hieraus

$$(30)\quad \lambda\varrho'-\varrho'^2-\frac{\alpha'}{4}\varrho'\geqq\frac{3}{4}\alpha'(1-\alpha')+\frac{1}{n}\left\{(\lambda-1)\varrho+\alpha'(1-\gamma)\left(1-\alpha-\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}-\alpha\right)\right)\right\}.$$

Ist $\lambda=1$, so ist $\gamma=1$; ferner gilt dann wegen (5) $\alpha<\frac{1}{4}$ und folglich ist Ungleichung (18) erfüllt.

Ist $\lambda>1$, so ist die in (30) rechts stehende Klammer positiv und aus (30) folgt

$$(31)\qquad \lambda\varrho'-\varrho'^2-\frac{\alpha'}{4}\varrho'>\frac{3}{4}\alpha'(1-\alpha').$$

Diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn man darin α' durch α ersetzt, denn für die Ableitungen beider Seiten nach α' gilt

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha')+\frac{\alpha'}{2}-\frac{\gamma}{4}\leq\frac{3}{4}(1-2\alpha'),$$

was mit $7\gamma\leq 4\lambda+3$ äquivalent ist. Man hat also jetzt wieder (29) erhalten, woraus die behauptete Ungleichung (18) folgt.

Beim Beweis von Satz 1 erhält man in analoger Weise statt (31)

$$\lambda\varrho'-\varrho'^2>\tfrac{3}{4}\alpha'(1-\alpha').$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle. Ist $\gamma\leq 2\alpha$, dann gilt für die Ableitungen beider Seiten nach α' und für alle $\alpha'\geqq\alpha$

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha')\leq\tfrac{3}{4}(1-2\alpha'),$$

so daß die zu beweisende Ungleichung

$$\gamma>\alpha+\tfrac{1}{2}\left\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

folgt. Ist aber $\gamma>2\alpha$, so ist diese Ungleichung unmittelbar zu verifizieren.

8. Der Beweis von Satz 3 soll nicht ausgeführt werden. Er kann leicht nach dem Vorbild in II erfolgen, indem man von der (21) entsprechenden asymptotischen Formel ausgeht und diese für eine solche Folge von n abschätzt, für die $\frac{C(n)}{n}\to\gamma^*$ gilt.

Literatur

[1] BRAUER, A.: On the Schnirelmann density of the sum of two sequences. Math. Z. **63**, 529–541 (1956). — [2] KASCH, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. **62**, 368—387 (1955). — [3] KASCH, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen (II. Mitt.). Math. Z. **64**, 243—257 (1956).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. Mai 1956)

Dinghas, A.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 173—188 (1956)

Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen

Von

Alexander Dinghas

1. Vorbereitende Tatsachen. Grundbegriffe. Es bedeute E^n den gewöhnlichen euklidischen Zahlenraum. Das Zeichen $+$, angewandt auf Punkte P, Q von E^n, soll im folgenden deren übliche vektorielle Verknüpfung bedeuten. Der Begriff des Punktes λP bei gegebenem P und reellem λ wird als bekannt vorausgesetzt.

Sind A, B zwei zunächst beliebige Punktmengen von E^n, so soll die durch die Gleichung

$$A + B = \{P + Q \mid P \in A,\ Q \in B\} \tag{1.1}$$

definierte Menge als die Minkowskische Summe von A und B bezeichnet werden. Danach gilt stets $A + \emptyset = \emptyset$. Entsprechend definieren wir die Menge λA (A reell) durch die Gleichung

$$\lambda A = \{\lambda P \mid P \in A\}. \tag{1.2}$$

Es gilt stets

$$\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\mu\lambda) A .$$

Bedeutet O den Nullpunkt von E^n, so sieht man leicht, daß dieser und nur dieser für jedes $A \in E^n$ den Gleichungen

$$A + O = A, \quad 0 \cdot A = O \tag{1.3}$$

genügt. Will man also innerhalb der Gesamtheit der Punktmengen von E^n einen brauchbaren Kalkül begründen, so muß man dabei, wie dies auch manchmal getan wird, die Nullmenge $\emptyset$ ausschließen. Die Minkowskische Addition (1.1) kann unter Zugrundelegung von (1.2) zu der Minkowskischen Vereinigung $\lambda A + \mu B$ (λ, μ reell) erweitert werden. Da diese Operation die assoziative Eigenschaft $(\lambda A + \mu B) + \nu C = \lambda A + (\mu B + \nu C)$ aufweist, so bildet der abstrakte Raum aller nichtleeren Mengen von E^n mit Rücksicht auf die Kommutativität von (1.1) eine kommutative, additive Halbgruppe. Im folgenden nennen wir eine mit Hilfe des Zeichens $+$ auf solche Weise gebildete Halbgruppe einen Minkowskischen Halbmodul und bezeichnen diesen mit $2^{\mathfrak{H}_0}$ [1]).

[1]) Man vgl. z. B. Fenchel, W.: Über die neuere Entwicklung der Brunn-Minkowskischen Theorie der konvexen Körper. Neuvième Congrès des Mathématiciens Scandinaves (Helsinki), 1938.

Wie bekannt, gilt, sofern A, B beliebig sind,

$$(\lambda+\mu)A \subseteqq \lambda A + \mu A \qquad (\lambda, \mu \geqq 0) \tag{1.4}$$

und stets

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B. \tag{1.5}$$

Fragt man nach dem Teilmodul von $2^{\mathfrak{H}_0}$, für dessen Elemente ebenfalls

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \tag{1.6}$$

gilt, so sieht man leicht, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür die ist, daß A stets konvex sein muß. Der MINKOWSKIsche Halbmodul, der aus allen nicht leeren, beschränkten, abgeschlossenen, konvexen Punktmengen von E^n besteht, wird im folgenden mit $2^{\mathfrak{M}}$ bezeichnet werden. Infolge der Gültigkeit von (1.6) spielt dieser Halbmodul innerhalb des durch den klassischen Satz von BRUNN-MINKOWSKI entstandenen Fragenkomplexes eine ausgezeichnete Rolle.

Man betrachte jetzt, was wir im folgenden stets tun werden, denjenigen Teilmodul $2^{\mathfrak{H}}$ von $2^{\mathfrak{H}_0}$, der aus allen beschränkten, abgeschlossenen, nicht leeren Punktmengen von E^n besteht, und ordne jedem $A \in 2^{\mathfrak{H}}$ seine konvexe Hülle $[A] \in 2^{\mathfrak{M}}$ zu. Da, wie man leicht sieht, stets

$$[\lambda A + \mu B] = \lambda[A] + \mu[B] \tag{1.7}$$

gilt, so wird durch den Prozeß $A \to [A]$ eine Überdeckung (im Sinne von $[A] \supseteqq A$) von $2^{\mathfrak{H}}$ gewonnen, die sämtliche Vorteile der beiden distributiven Gesetze (1.6) und (1.5) aufweist. Sie spielt für die nachfolgende Integrationstheorie eine fundamentale Rolle.

2. Der Entfernungsbegriff. Erste Hilfssätze. Es bedeute $|P, Q|$ die gewöhnliche, euklidische Entfernung zweier Punkte von E^n. Sind dann $A, B \in 2^{\mathfrak{H}}$, so soll der Ausdruck

$$|A, B| = \operatorname{Max}\left\{\sup_{P \in A}\left(\inf_{Q \in B}|P, Q|\right), \sup_{Q \in B}\left(\inf_{P \in A}|P, Q|\right)\right\} \tag{2.1}$$

die Entfernung von A und B heißen. Diese Entfernung erfüllt bekanntlich[2]) die Forderungen:

1. $|A, B| > 0$ für jedes $A \neq B$.
2. $|A, B| = |B, A|$.
3. $|A, B| \leq |A, C| + |B, C| \quad (C \in 2^{\mathfrak{H}})$.

Für die weitere Entwicklung der MINKOWSKIschen Theorie sind folgende Hilfssätze von Nützlichkeit:

---

[2]) Man vgl. z.B. BOULIGAND, G.: Les principes de l'Analyse géométrique, Bd. II, S. 147. Paris 1950.

Hilfssatz 1. *Es seien* $A_k, B_k \in 2^{\mathfrak{H}}$, $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$. *Ist*

$$A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_l A_l \tag{2.1}$$

und

$$B = \lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_l A_l, \tag{2.2}$$

so gilt

$$|A, B| \leq \sum_1^l \lambda_k |A_k, B_k|. \tag{2.3}$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist einfach. Es sei in der Tat $P^* \in A$, $Q^* \in B$. Dann ist $P^* = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_l P_l$, $Q^* = \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_l Q_l$ mit $P_k \in A_k$, $Q_k \in B_k$. Daraus folgt

$$|P^*, Q^*| \leq \lambda_1 |P_1, Q_1| + \cdots + \lambda_l |P_l, Q_l|.$$

Wählt man hier die Punkte P_k fest, so folgt leicht

$$\inf_{Q \in B} |P^*, Q| \leq \sum_1^l \lambda_k \inf_{Q_k \in B_k} |P_k, Q_k|,$$

und somit für jeden Punkt $P \in A$

$$\inf_{Q \in B} |P, Q| \leq \sum_1^l \lambda_k |A_k, B_k|.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\sup_{P \in A} \left\{ \inf_{Q \in B} |P, Q| \right\} \leq \sum_1^l \lambda_k |A_k, B_k|,$$

und durch Vertauschung der Rolle der P_k und Q_k (also auch der von P und Q) die Ungleichung (2.3).

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel für spätere Grenzübergänge ist das Analogon des Bolzano-Weierstrassschen Satzes für den Raum $2^{\mathfrak{H}}$.

Hilfssatz 2 (Bolzano-Weierstrass). *Es bezeichne* (A_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ *eine abzählbare Menge gleichmäßig beschränkter, abgeschlossener Mengen von* E^n. *Dann läßt sich aus* (A_k) *eine Teilfolge* $(A_{k'})$ *bestimmen, die gegen eine Menge* A *von* $2^{\mathfrak{H}}$ *derart konvergiert, daß*

$$\lim_{k' \to \infty} |A_{k'}, A| = 0 \tag{2.4}$$

wird[3]).

[3]) Der Hilfssatz 2, der oft unter dem Namen Auswahlsatz geführt wird, wurde meines Wissens zuerst von Blaschke (man vgl. Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 62) für konvexe A_k bewiesen und zum Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes verwendet. Eine Übertragung desselben auf den Raum $2^{\mathfrak{H}}$ gab neuerdings Hadwiger [Ein Auswahlsatz für abgeschlossene Punktmengen. Portugal. Mathem. **8**, 13—15 (1949)]. Man vgl. auch die lithographierte Vortragssammlung: Seminar on convex sets (The Institute for Advanced Study, Princeton N. J. 1949/50), insbesondere Vortrag V (A. M. Macbeath, Compactness Theorems). Beide letztgenannten Beweise, die anscheinend gleichzeitig entstanden sind, fußen auf denselben methodischen Grundlagen.

Der Inhalt dieses Hilfssatzes ist in folgender allgemeiner Aussage über kompakte Räume enthalten:

Es sei H ein kompakter (HAUSDORFFscher) *metrischer Raum, und es bezeichne 2^H den Raum, der aus allen nichtleeren, beschränkten, abgeschlossenen Teilmengen von H besteht. Dann ist 2^H ein kompakter metrischer Raum.*

Die Metrik in 2^H wird hier natürlich unter Zugrundelegung der Metrik $|P, Q|$ in H durch (2.1) definiert werden. Für den Beweis dieses allgemeinen Kompaktheitssatzes sei auf die einschlägige Literatur verwiesen[4]).

Man betrachte jetzt bei gegebenem $A \in 2^{\mathfrak{H}}$ die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ aller Mengen von der Form $\lambda_1 A + \cdots + \lambda_l A$ mit $\lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = 1$. Offenbar ist $\mathfrak{A}$ als Teilklasse in $2^{\mathfrak{H}}$ enthalten und hat als kleinstes Element die Menge A.

Wir zeigen:

Hilfssatz 3. *Die Menge $[A]$ ist das Supremum von $\mathfrak{A}$*[5]).

In der Tat gilt zunächst bei vorgegebenem $A \in \mathfrak{A}$

$$\lambda_1 A + \cdots + \lambda_l A \subseteq \lambda_1 [A] + \cdots + \lambda_l [A] = [A].$$

Es sei nun A^* eine abgeschlossene Menge von E^n, die jedes Element von $\mathfrak{A}$ enthält. Es seien P_1, P_2 zwei beliebige Punkte von A. Dann enthält offenbar A^* jeden Punkt von der Form $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) und hiermit auch $[A]$. Somit ist $[A]$ das Supremum von $\mathfrak{A}$.

3. Mengenfamilien. Stetigkeit. Eine eindeutige Mengenfunktion (A_λ) wird im Intervall

$$J: \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{3.1}$$

[6]) dadurch gegeben, daß jedem $\lambda \in J$ eindeutig eine Menge $A_\lambda \in 2^{\mathfrak{H}}$ zugeordnet wird. Ist J_{λ_0} ($\lambda_0 \in J$) ein abgeschlossenes Teilintervall von J, das den Punkt λ_0 enthält, so soll die Zahl

$$\sup_{\lambda', \lambda'' \in J_{\lambda_0}} |A_{\lambda'}, A_{\lambda''}| = \omega(J_{\lambda_0}) \tag{3.2}$$

die Schwankung von A_λ in J_{λ_0} heißen. Die Funktion (A_λ) soll nun in λ_0 stetig heißen, falls die Schwankung

$$\omega(\lambda_0) = \lim_{|J_{\lambda_0}| \to 0} \omega(J_{\lambda_0}) \tag{3.3}$$

gleich Null wird. Hierbei soll $|J_{\lambda_0}|$ die Länge von J_{λ_0} bedeuten. Gilt $\omega(J_\lambda) = 0$ für jedes $\lambda \in J$, so heißt (A_λ) stetig in J. Analog definiert man eindeutige, stetige Funktionen in allgemeineren Mengen als J.

[4]) Man vgl. z.B. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre, 3. Aufl., S. 148. Leipzig 1935, oder etwa den zweiten Band der KURATOWSKIschen Topologie.

[5]) Zur Begriffsbildung vgl. man etwa: KELLEY, I. L., General Topology, S. 32. New York 1955.

[6]) Der Fall eines beliebigen, endlichen J kann, was die Begriffsbildungen anbetrifft, durch dessen lineare Abbildung auf (3.1) erledigt werden.

Ist (A_λ) stetig in $\lambda_0 \in J$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Intervall $J_{\lambda_0}^*$ derart, daß für jedes $J_\lambda \subseteq J_{\lambda_0}^*$ die Ungleichung

$$\sup_{\lambda \in J_{\lambda_0}} |A_\lambda, A_{\lambda_0}| < \varepsilon \tag{3.4}$$

gilt.

Ist (A_λ) eine vorgelegte Funktion in J, so soll $([A_\lambda])$ die zu (A_λ) zugehörige Deckelfunktion heißen. Wir beweisen den Satz:

Hilfssatz 4. *Ist (A_λ) stetig in $\lambda_0 \in J$, so trifft dies auch für die Funktion $([A_\lambda])$ zu.*

Beweis. Es bezeichne, wie üblich, bei gegebenem A, A^h $(h > 0)$ die Außenmenge von A in der Entfernung h. Sind nun $A, B \in 2^{\mathfrak{H}}$, so gilt bekanntlich

$$|A, B| = \inf\{h \mid A^h \supseteq B, B^h \supseteq A\}.$$

Ist nun $A \subseteq B^h$, so ist

$$[A] \subseteq [B^h] \subseteq [B]^h,$$

und somit folgt aus $|A, B| \leq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die Ungleichung $|[A], [B]| \leq \varepsilon$. Das beweist die Behauptung.

4. Bildung Riemann-Minkowskischer Summen. Man zerlege J in endlich viele punktfremde Intervalle $J_1, \ldots, J_l (J_k \cap J_r = \emptyset,\ k \neq r)$, und nenne den dadurch ausgedrückten Sachverhalt $J = \bigcup_1^l J_k$ eine Riemannsche Zerlegung von J. Bedeutet dann $|J_k|$ die Länge von J_k, so gilt $|J| = \sum_1^l |J_k|$. Mit Hilfe einer solchen Zerlegung von J bilde man die R.emann-Minkowskischen Summen

$$S = |J_1| A_{\xi_1} + \cdots + |J_l| A_{\xi_l}, \tag{4.1}$$

indem man $\xi_k \in J_k$ wählt. Die Gesamtheit aller Minkowskischen Summen von der Form (4.1), wobei sowohl die Zerlegung von J wie auch die Wahl der Punkte $\xi_k (\xi_k \in J_k)$ beliebig sein können, soll mit $\mathfrak{R}(S)$ bezeichnet werden. Setzt man jedesmal $\delta_M = \operatorname{Max}\{|J_1|, \ldots, |J_l|\}$, so besteht das Hauptproblem der Riemann-Minkowskischen Integrationstheorie darin, die Bedingungen aufzustellen, unter welchen eine Menge S_0 existiert, für welche

$$S_0 = \lim_{\delta_M \to 0} \{|J_1| A_{\xi_1} + \cdots + |J_l| A_{\xi_l}\} \tag{4.2}$$

gilt. Ist neben (4.1) eine zweite Minkowskische Summe

$$S' = |J_1'| A_{\xi_1'} + \cdots + |J_l'| A_{\xi_l'} \tag{4.3}$$

gegeben, so bilde man eine Riemannsche Zerlegung $J = \bigcup_1^{l''} J_s''$ von J, deren Teilintervalle J_s'' den Bedingungen

$$J_s'' \subseteq J_k, \quad J_s'' \subseteq J_r' \qquad (s = 1, 2, \ldots, l'') \tag{4.4}$$

genügen. Diese Relationen sind, wie bekannt, so zu interpretieren, daß jedes Intervall J_s'' in einem bestimmten J_k und einem bestimmten J_r' enthalten ist. Die Existenz einer „maximalen" solchen gemeinsamen Unterteilung von J wird uns hier nicht interessieren. Man konstruiere jetzt die MINKOWSKIschen Summen

$$S_1 = |J_1''|\, A_{\eta_1} + \cdots + |J_{l''}''|\, A_{\eta_l''} \tag{4.5}$$

und

$$S_1' = |J_1''|\, A_{\eta_1'} + \cdots + |J_{l''}''|\, A_{\eta_{l''}'} \tag{4.6}$$

durch folgende Vorschrift:

1. Gilt $J_s'' \subseteqq J_k$, so ist $\eta_s = \xi_k$.
2. Gilt $J_s'' \subseteqq J_r'$, so ist $\eta_s' = \xi_r'$.

Diese Zuordnungen sind eindeutig. Die Summen (4.5) und (4.6) sind nicht notwendigerweise in $\mathfrak{R}(S)$ enthalten, da sie ja keineswegs RIEMANN-MINKOWSKIsche Summen zu sein brauchen. Das ist nur dann der Fall, falls $A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}$ dem Wertevorrat von $A_\lambda\,(\lambda \in J_s'')$ angehören. Diese Mengen sind nützlich und leisten bei der Abschätzung der Entfernung von S und S' gute Dienste. Im allgemeinen gelten infolge (1.4) die Relationen $S_1 \geqq S$ und $S_1' \geqq S'$. Da hier die Gleichungen $S_1 = S$, $S_1' = S'$ nur dann gelten, wenn alle A_λ konvex sind, so beschränken wir uns zunächst auf solche Funktionen (A_λ), deren sämtliche Wertemengen A_λ konvexe Punktmengen von E^n sind. Der Fall beliebiger $A \in 2^{\mathfrak{H}}$ führt, wie bald gezeigt werden soll, zwangsläufig auf das Integral der Mengenfunktion $([A_\lambda])$.

5. Integrierbare konvexe Mengenfunktionen. Der Konvergenzbeweis. Eine Mengenfunktion (A_λ), deren Wertemengen gleichmäßig beschränkte konvexe Punktmengen von $2^{\mathfrak{H}}$ sind, soll RIEMANN-MINKOWSKI-integrierbar heißen, wenn die Grenzmenge S_0 bei beliebiger Wahl der ξ_k im Sinne von (4.2) existiert. Wir zeigen:

Hat $\{\lambda | \omega(\lambda) > 0\}$ das LEBESGUEsche Maß Null, so ist (A_λ) RIEMANN-MINKOWSKI-integrierbar.

Der Beweis stützt sich auf folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 5. *Die Menge* $E_\varepsilon = \{\lambda | \omega(\lambda) \geq \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ *ist stets abgeschlossen.*

Es sei E_ε nicht leer, und λ_0 ein Häufungspunkt von E_ε. Ist dann $\eta > 0$ und $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ eine Umgebung U von λ_0, so gibt es in ihr mindestens zwei Punkte λ_0', λ_0'' $(\lambda_0' \neq \lambda_0'')$ von E_ε mit $|\lambda_0' - \lambda_0''| < 2\eta$ und $|A_{\lambda_0'}, A_{\lambda_0''}| \geqq \varepsilon$. Daraus folgt

$$\sup_{\lambda'\lambda'' \in U} |A_{\lambda'}, A_{\lambda''}| \geq |A_{\lambda_0'}, A_{\lambda_0''}| \geq \varepsilon.$$

Das beweist die Behauptung.

Der Beweis nachfolgenden Hilfssatzes wird dem Leser überlassen:

Hilfssatz 6. *Ist* (A_λ) *in jedem Punkt eines abgeschlossenen Teilintervalls* J_1 *von* J *stetig, so ist* (A_λ) *dort gleichmäßig stetig.*

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zum Beweis der Integrierbarkeit von (A_λ) zurück. Ist zunächst $\{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ leer, so betrachte man die zwei Minkowskischen Summen (4.1) und (4.3) mit $\delta_M = \text{Max}\{|J_k|, |J_r'\} < \eta$ und bilde eine gemeinsame Unterteilung von J, etwa $J = \bigcup_1^{l''} J_s''$. Dann wird, wegen der Konvexität der A_λ, $S_1 = S$ und $S_1' = S'$. Daraus folgt durch Heranziehung des Hilfssatzes 1

$$|S, S'| \leq \sum_1^{l''} |J_s''|\,|A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}|. \tag{5.1}$$

Nun ist $|\eta_s - \eta_s'| < 2\eta$ $(s = 1, 2, \ldots, l'')$, und somit kann durch die Wahl von η erreicht werden (Hilfssatz 6!), daß für alle s $|A_{\eta_s'}, A_{\eta_s'}| < \varepsilon$ gilt. Somit kann die rechte Seite von (5.1) $\leq \varepsilon$ gemacht werden. Bevor wir daraus weitere Konsequenzen ziehen, soll noch der allgemeine Fall erledigt werden.

Es sei $\{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ nicht leer. Dann ist E_ε von einem ε $(0<\varepsilon<\varepsilon_0)$ an ebenfalls nicht leer. Da ferner für jedes $\varepsilon>0$, $E_\varepsilon \subseteq \{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ gilt, so kann man E_ε durch endlich viele abgeschlossene Intervalle $a_k \leq \lambda \leq b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ überdecken, deren Gesamtlänge ε nicht übersteigt. Es bezeichnen $J_1^0, \ldots, J_N^0$ die Intervalle $a_k - \varepsilon/2N < \lambda < b_k + \varepsilon/2N$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Dann besteht $J - \bigcup_1^N J_k^0$ aus endlich vielen abgeschlossenen Intervallen $I_1, \ldots, I_{N_1}$, die nur Punkte mit $\omega(\lambda) < \varepsilon$ enthalten. Man betrachte die Abschätzung

$$|S, S'| \leq \sum_1^N |J_s''|\,|A_{\eta_s}, A_{\eta_s'}| \tag{5.2}$$

und wähle η so klein, daß für je zwei Punkte ξ' und ξ'' eines und desselben Intervalls I_k gilt $|A_{\xi'}, A_{\xi''}| \leq \varepsilon$. Man teile die Intervalle J_s'' in drei Klassen ein:

1. Intervalle J_s'', die in einem I_k liegen.
2. Intervalle, die in keinem I_k liegen und
3. die übrigen J''.

Die Teilsumme über die Intervalle 1. ist offenbar $\leq \varepsilon$. Da ferner die Mengen A_λ sämtlich in einer endlichen Kugel um den Nullpunkt liegen, so liefern die beiden letzten Kategorien 2. und 3. einen Beitrag $\leq C\varepsilon (C>0)$, wobei die Konstante C von ε unabhängig ist. Das erledigt den allgemeinen Fall. Man betrachte nun irgendeine abzählbare Folge (S_n) von Minkowskischen Summen von der Form (4.1) mit $\delta_M = 1/n$ und bestimme mit Hilfe des Auswahlsatzes (Hilfssatz 2) die (abgeschlossene) Grenzmenge $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Da nun diese Menge unabhängig von der speziellen Folge Minkowskischer Summen ist, so setzen wir

$$\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda = \lim_{\delta_M \to 0} \{|J_1|\, A_{\xi_1} + \cdots + |J_l|\, A_{\xi_l}\}, \tag{5.3}$$

und nennen die abgeschlossene Menge links das Riemann-Minkowskische Integral von (A_λ).

Ich erwähne hier einige wichtige Eigenschaften des RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrals. Es gelten folgende einigermaßen wichtige Sätze:

Satz 1. *Sind* (A_λ) *und* (B_λ) *in* J RIEMANN-MINKOWSKI-*integrierbar, so ist* $(\alpha A_\lambda + \beta B_\lambda)$ *für* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ RIEMANN-MINKOWSKI-*integrierbar und es gilt*

$$\int_0^1 d\lambda \{\alpha A_\lambda + \beta B_\lambda\} = \alpha \int_0^1 d\lambda A_\lambda + \beta \int_0^1 d\lambda B_\lambda. \tag{5.4}$$

Satz 2. *Ist* (A_λ) RIEMANN-MINKOWSKI-*integrierbar und* $0 < \vartheta < 1$, *so gilt*

$$\int_0^1 d\lambda A_\lambda = \int_0^\vartheta d\lambda A_\lambda + \int_\vartheta^1 d\lambda A_\lambda. \tag{5.5}$$

Setzt man $B_\lambda = O$, so folgt insbesondere aus (5.4)

$$\int_0^1 d\lambda (\alpha A_\lambda) = \alpha \int_0^1 d\lambda A_\lambda. \tag{5.6}$$

Der Beweis dieser Gleichungen bietet keine Schwierigkeit. Insbesondere folgt (5.5) durch Betrachtung sämtlicher MINKOWSKIscher Summen von der Form (4.1), bei denen $\lambda = \vartheta$ als Einteilungspunkt vorkommt.

Besteht (A_λ) aus endlich vielen festen konvexen Mengen $A_1, \ldots, A_N$, also

$$(A_\lambda) = \left\{A_k \mid \lambda \in J_k,\ J = \bigcup_1^l J_k,\ J_r \cap J_s = \emptyset,\ r \neq s\right\},$$

so geht das RIEMANN-MINKOWSKIsche Integral (5.3) in die MINKOWSKIsche Summe $|J_1| A_1 + \cdots + |J_l| A_l$ über. Daß hier $\sum_1^l |J_k| = 1$ genommen wurde, ist natürlich belanglos, da man ja die Definition des RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrals für ein beliebiges Intervall der λ-Achse geben kann.

Etwas mehr Schwierigkeit bereitet die Definition des RIEMANN-MINKOWSKIschen Integrals für eine beliebige Mengenfunktion (A_λ) $(A_\lambda \in 2^{\mathfrak{H}},\ \lambda \in J)$. In diesem Zusammenhang ist zunächst zu bemerken, daß für eine konstante Mengenfunktion $(A_\lambda) = A \in 2^{\mathfrak{H}}$ stets $\int_0^1 d\lambda [A] = [A]$ gilt. Das kann man folgendermaßen sehen: Man betrachte eine RIEMANN-MINKOWSKIsche Summe $S = |J_1| A + \cdots + |J_l| A$ und setze $|J_k| = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ $(\lambda_0 = 0,\ \lambda_l = 1)$. Sind dann P, Q zwei Punkte von A, so enthält S den Punkt $\mu P + \nu Q$ mit $\mu = \lambda_r$, $\nu = 1 - \lambda_r$ $(0 < r < l)$ und insofern kommen (bei der gestellten Bedingung δ_M) die Mengen von $\mathfrak{R}(S)$ jedem Punkt von $[A] - A$ beliebig nahe. Der Leser wird den ausführlichen Beweis selbst durchführen können. Da nun für eine stückweise konstante Funktion, etwa

$$(A_\lambda) = \left\{A_k \mid \lambda_{k-1} \leq \lambda < \lambda_k,\ A_k \in 2^{\mathfrak{H}},\ k = 1, \ldots, l\right\},$$

ebenfalls

$$\int_0^1 d\lambda A_\lambda = |J_1| [A_1] + \cdots + |J_l| [A_l]$$

gilt, so definieren wir allgemein für jede Mengenfunktion (A_λ), welche die eingangs dieser Nummer formulierte Integrierbarkeitsbedingung erfüllt, das Integral $\int_0^1 d\lambda A_\lambda$ durch die Gleichung

$$\int_0^1 d\lambda A_\lambda = \int_0^1 d\lambda [A_\lambda]. \tag{5.7}$$

Ist $n=1$, so geben diese Entwicklungen eine geometrische Interpretation des Riemannschen Integrals einer reellen nicht negativen Funktion $f(\lambda)$ über das Intervall J, indem man als A_λ die Intervalle $0 \leq \lambda \leq f(\lambda)$ nimmt. Bei höheren Dimensionen wird wohl der Begriff komplizierter, und erst die Konvexität von A_λ (welche wohl einigermaßen die Rolle der Eindeutigkeit übernimmt) schafft ein klareres geometrisches Bild. Natürlich kann man neben dem Intervall J auch mehrdimensionale Intervalle J_p betrachten und, sofern die Mengenfamilien von mehreren Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ abhängt, wobei der Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ in J_p liegen soll, Integrale über J_p definieren. Wir gehen darauf nicht näher ein.

6. Verallgemeinerung der Brunn-Minkowskischen Sätze. Bedeutet allgemein $L(M)$ das Lebesguesche Maß einer meßbaren Punktmenge von E^n, so gipfelt bekanntlich die Brunn-Minkowskische Theorie der konvexen Körper in der Aussage

$$L(A_0 + A_1)^{1/n} \geq L(A_0)^{1/n} + L(A_1)^{1/n} \tag{6.1}$$

für je zwei $A_0, A_1 \in 2^{\mathfrak{M}}$, und in der Behauptung, daß

$$\Phi(\vartheta) = L\big((1-\vartheta) A_0 + \vartheta A_1\big)^{1/n} \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1) \tag{6.2}$$

bei gegebenen A_0, A_1 eine konkave Funktion von ϑ sei. Ich erwähne hier diese Aussagen getrennt, da bekanntlich[7]), während die erste Ungleichung, wie dies zuerst Lusternik gezeigt hat[8]), für viel allgemeinere Halbmoduln als $2^{\mathfrak{M}}$ (z. B. gilt sie für je zwei Elemente von $2^{\mathfrak{H}}$) richtig bleibt, die Konkavitätseigenschaft von $\Phi(\vartheta)$ eine spezifische Eigenschaft des Halbmoduls $2^{\mathfrak{M}}$ zu sein scheint. Der Hauptsatz vorliegender Arbeit lautet nun:

Satz 3. *Es sei (A_λ) eine in J-Riemann-Minkowski-integrierbare Mengenfunktion.*

Dann gilt

$$L\Big(\int_0^1 d\lambda A_\lambda\Big)^{1/n} \geq \int_0^1 L(A_\lambda)^{1/n}\, d\lambda. \tag{6.3}$$

Ist für jedes $\lambda \in J$, $L\big([A_\lambda]\big) > 0$, so kann hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann eintreten, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

---

[7]) Man vgl. z. B. Fenchel: loc. cit. Fußnote[1]).

[8]) Lusternik, L.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für meßbare Mengen. Compt. Rend. Acad. Sci. UdSSR. **3**, 55—58 (1935).

1. *Es gibt eine in J* RIEMANN*-integrierbare, reelle Funktion $f(\lambda)$, die außerhalb von $E=\{\lambda|\omega(\lambda)>0\}$ positiv ist.*

2. *Es gilt außerhalb von E*

$$A_\lambda = f(\lambda)\,A \tag{6.4}$$

mit einer festen, konvexen Menge $A\in 2^{\mathfrak{M}}$ und $L(A)>0$.

Sieht man vom Zusatz über das Eintreten des Gleichheitszeichens ab, so ist der Beweis von (6.3) einfach. Es sei $\varepsilon>0$. Man schreibe A für $\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$ und bilde die in 3. erklärte Menge A^ε. Nun weiß man, daß zu dem gegebenen $\varepsilon>0$ ein $\eta=\eta(\varepsilon)$ existiert, derart, daß jede RIEMANNsche Summe S mit $\delta_M<\eta$ in A^ε enthalten ist. Daraus folgt nach dem klassischen Satz von BRUNN-MINKOWSKI

$$L(A^\varepsilon)^{1/n}\geq \sum_1^l |J_k|\, L[A_{\xi_k}]^{1/n}. \tag{6.5}$$

Jetzt lasse man δ_M auf irgendeine Weise gegen Null konvergieren. Da jedes $[A_\lambda]$ eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Menge ist, so ist $L([A_\lambda])$ in jeder Stetigkeitsstelle von A_λ stetig, und somit konvergiert die rechte Seite von (6.5) mit abnehmenden δ_M gegen die rechte Seite von (6.3). Danach wird zunächst für jedes $\varepsilon>0$,

$$L(A^\varepsilon)^{1/n}\geq \int_0^1 L([A_\lambda])^{1/n}\,d\lambda. \tag{6.6}$$

Nun ist A eine beschränkte abgeschlossene Menge. Läßt man $\varepsilon\to 0$ konvergieren, so konvergiert $L(A^\varepsilon)$ gegen $L(A)$, und somit wird schließlich

$$L\Big(\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda\Big)^{1/n}\geq \int_0^1 L([A_\lambda])^{1/n}\,d\lambda\geq \int_0^1 L(A_\lambda)^{1/n}\,d\lambda. \tag{6.8}$$

7. Vorbereitende Tatsachen zum Einzigkeitsbeweis. Die Diskussion des Eintretens des Gleichheitszeichens in (6.3) geschieht am einfachsten auf Grund einer verschärften HÖLDERschen Ungleichung, die im folgenden bewiesen werden soll.

Man setze bei gegebenen $r_1,\dots,r_l$ $(r_k>0,\ r_1+\cdots+r_l=1)$

$$g(\alpha_s)=\sum_{i>k} r_i r_k(\alpha_i-\alpha_k)^2. \tag{7.1}$$

Dann gilt für reelle α_k

$$\sum_1^l r_k\alpha_k^2-\Big(\sum_1^l r_k\alpha_k\Big)^2=g(\alpha_s)\geq 0\ ^{9}). \tag{7.2}$$

---

[9]) Setzt man $F_k=(r_1+\cdots+r_k)(r_1\alpha_1^2+\cdots+r_k\alpha_k^2)-(r_1\alpha_1+\cdots+r_k\alpha_k)^2$ mit $k=1,2,\dots,l-1$, so gilt $F_{k+1}-F_k=\sum_{\lambda=1}^{k} r_{k+1}r_\lambda(\alpha_{k+1}-\alpha_\lambda)^2$. Daraus folgt (7.1) wegen $F_2=r_1r_2(\alpha_1-\alpha_2)^2$ und $r_1+\cdots+r_l=1$ ohne Schwierigkeit.

Verbindet man diese Identität mit der klassischen Ungleichung

$$\sum_1^l r_k \alpha_k \geqq \prod_1^l \alpha_k^{r_k}, \tag{7.3}$$

so erhält man, wenn man α_k^2 durch α_k $(\alpha_k > 0)$ ersetzt,

$$r_1\alpha_1 + \cdots + r_l\alpha_l \geqq \alpha_1^{r_1} \ldots \alpha_l^{r_l} + g\left(\sqrt{\alpha_s}\right). \tag{7.4}$$

Man ersetze nun hier die α_k durch die ebenfalls positiven Zahlen $a_{k\nu}$ (ν fest) und lasse dann ν die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ durchlaufen. Normiert man noch die $a_{k\nu}$ durch die Forderung $a_{k1} + \cdots + a_{km} = 1$, so wird nach Addition der entsprechenden Ungleichungen

$$1 \geqq \sum_{\nu=1}^m \left\{ \prod_{k=1}^l a_{k\nu}^{r_k} \right\} + \sum_{\nu=1}^m g\left(\sqrt{a_{s\nu}}\right). \tag{7.5}$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier nur dann ein, wenn für jedes k, $a_{k\nu} = b$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ mit $b_1 + \cdots + b_m = 1$ ist.

Läßt man die Bedingung $a_{k1} + \cdots + a_{km} = 1$ fallen, so erhält man aus (7.5) eine Verschärfung der Hölderschen Ungleichung. Es gilt dann der

Hilfssatz 7. *Es seien $a_{k\nu}$ $\{k = 1, \ldots, l,\ \nu = 1, \ldots, m\}$ positive Zahlen. Ferner sei $\delta_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. Setzt man dann*

$$\alpha_{k\nu} = a_{k\nu} : \sum_{\nu=1}^m a_{k\nu}\delta_\nu \tag{7.6}$$

und

$$G(\alpha_{rs}) = \prod_{k=1}^l \left\{ \sum_{\nu=1}^m a_{k\nu}\delta_\nu \right\} \sum_{\nu=1}^m \left\{ \sum_{i>k} r_i r_k \left(\sqrt{\alpha_{i\nu}} - \sqrt{\alpha_{k\nu}}\right)^2 \delta_\nu^2 \right\}, \tag{7.7}$$

so wird

$$\prod_{k=1}^l \left\{ \sum_{\nu=1}^m a_{k\nu}\delta_\nu \right\}^{r_k} \geqq \sum_{\nu=1}^m \delta_\nu \left\{ \prod_{k=1}^l a_{k\nu}^{r_k} \right\} + G(\alpha_{rs}). \tag{7.8}$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn

$$\alpha_{k\nu} = C_\nu \alpha \quad (\alpha > 0,\ C_\nu > 0)$$

ist.

Das Analogon zu diesem Satz für Integrale soll lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt werden, und zwar den später auftretenden Bedingungen angepaßt.

Hilfssatz 8. *Die Funktionen $f_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, l)$ mögen im Intervall J: $0 \leqq \lambda \leqq 1$ nicht negativ, beschränkt und* Lebesgue*-integrierbar sein. Dann gilt*

$$\prod_{k=1}^l \left\{ \int_J f_k \, d\lambda \right\}^{r_k} \geqq \int_J \left\{ \prod_{k=1}^l f_k^{r_k} \right\} d\lambda + G(f) \tag{7.9}$$

mit

$$G(f) = \prod_1^l \left\{ \int_J f_k \, d\lambda \right\}^{r_k} \cdot \left\{ \sum_{k>i} r_i r_k \int_J \left(\sqrt{\varphi_i} - \sqrt{\varphi_k}\right)^2 d\lambda \right\} \tag{7.10}$$

und

$$\varphi_k = \varphi_k(\lambda) = f_k(\lambda) : \int_J f_k \, d\lambda \qquad (k = 1, \ldots, l). \tag{7.11}$$

Das Gleichheitszeichen in (7.9) tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn fast überall in J $\varphi_k(\lambda) = \varphi_r(\lambda)$ $(k, r = 1, \ldots, l)$ gilt.

8. Die BRUNN-MINKOWSKI-SCHMIDTsche Abbildung. Es sei K ein konvexer Körper von E^n mit inneren Punkten. Andererseits sei $g_K = g_K(P)$ eine in K definierte Punktfunktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $g_K(P) > 0$ $(P \in K^* = \operatorname{int} K)$.

2. $g_K(P)$ ist in K^* stetig.

3. $g_K(P)$ ist translationsinvariant. Mit anderen Worten: Geht K durch eine Translation τ in K^τ über, so gilt $g_{K^\tau}(P^\tau) = g_K(P)$.

Mit Hilfe von g_K definiere man nun in E^n (bei festem K) die Funktion $g_n(P)$ durch die Vorschrift

$$g_n(P) = \begin{cases} g_K(P) & P \in K^* \\ 0 & P \notin K^*. \end{cases} \tag{8.1}$$

Man setze jetzt für ein $P = P(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ und $k = 1, 2, \ldots, n$

$$g_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi)\, d\xi \tag{8.2}$$

und definiere mit Hilfe der Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{x_k} g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi)\, d\xi = \tau_k \cdot g_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) \tag{8.3}$$

die Funktionen $\tau_k = \tau_k(x_1, \ldots, x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Die Integrale können hier, soweit es sich um konvexe Punktmengen handelt, im RIEMANNschen Sinne genommen werden. Durch die Funktionen $\tau_k = \tau_k(x_1, \ldots, x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ wird K^* eineindeutig und stetig auf das Innere des Würfels

$$T_0\colon \quad 0 \leq \tau_k \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.4}$$

abgebildet. Die Stetigkeit folgt aus der Tatsache, daß die Funktionen g_k sich in der Form

$$g_k(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x_1, \ldots, x_k, \xi_1, \ldots, \xi_{n-k})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-k} \tag{8.5}$$

darstellen lassen und infolgedessen stetige Funktionen ihrer Argumente sein müssen, soweit diese Koordinaten eines Punktes $P \in K^*$ sind. Eine leichte Überlegung zeigt nun, daß $x_1 = x_1(\tau_1)$ eine in $0 < \tau_1 < 1$ stetige, monoton wachsende Funktion von τ_1 ist. Verwendet man diese Tatsache in der Gl. (8.3) für $k = 2$, so stellt man fest, daß $x_2 = x_2(\tau_1, \tau_2)$ gilt und daß die Abhängigkeit von τ_2 eine monotone ist. Dasselbe gilt allgemein für alle Funktionen

$$x_k = x_k(\tau_1, \ldots, \tau_k) \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Die Eindeutigkeit $T^* \to K^*$ zeigt man nun so: Zunächst kann ein zweiter Punkt $P'(x_1', \ldots, x_n')$ von K^* nur dann denselben Punkt $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ von T_0^* geben,

wenn $x_1' \neq x_1$ ist. Es sei r der kleinste Index mit $x_k = x_k'$. Dann folgt aus (8.3) leicht

$$\int_{x_r'}^{x_r} g_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, \xi)\, d\xi = (\tau_r - \tau_r)\, g_{r-1}(x_1, \ldots, x_{r-1}) = 0,$$

und somit muß $x_r' = x_r$ sein. Die entsprechende Behauptung für die Abbildung $K^* \to T^*$ möge der Leser selbst beweisen.

Die Abbildung $K^* \to T^*$ geht für den Spezialfall $g_K(P) = 1$, also für den Fall, wo die g_k die Inhalte v_k der ebenen Schnitte von K^* darstellen, auf eine mündliche Mitteilung von Erhard Schmidt aus dem Jahre 1943 zurück[10]).

Die Konstante $g_0 = g_0(K)$ ist mit der Funktion $g_n(P)$ durch die Gleichung

$$g_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(P)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{8.6}$$

verbunden. Der Aufbau einer Theorie, ähnlich der Brunn-Minkowskischen, mit diesem verallgemeinerten Volumen wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

9. Durchführung des Einzigkeitsbeweises. Ist (A_λ) eine Mengenfunktion, die den Zusatzbedingungen des Satzes 3 von 6. genügt, so kann man (6.3) verschärfen und dadurch (6.4) beweisen.

Wir nehmen $g_n^\lambda(P) = q^\lambda(P)$ an, wobei $q^\lambda(P)$ die charakteristische Funktion von A_λ ist, und schreiben $v_0^\lambda, \ldots, v_n^\lambda$ an Stelle von $g_0^\lambda, \ldots, g_n^\lambda$. Die Funktionen $v_k^\lambda = v_k^\lambda(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ hängen lediglich von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$ von $P(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ ab. Ferner verschwinden sämtliche Funktionen $v_1^\lambda, \ldots, v_n^\lambda$ außerhalb A. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 9. *Ist (A_λ) im Punkt $\lambda = \lambda_0 \in J$ stetig und konvergiert $P_\lambda \to P_0$ $(P_\lambda \in A_\lambda,\ P_0 \in A_{\lambda_0}$ fest), so gilt für $k = 1, 2, \ldots, n-1$*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} v_k^\lambda(P) = v_k^{\lambda_0}(P_0). \tag{9.1}$$

Die Aussage (9.1) ist auch für $k = n$ richtig, da für genügend kleine Differenz $|\lambda - \lambda_0|$ P in A_{λ_0} liegt und somit $\varphi^\lambda(P) = \varphi^{\lambda_0}(P_0) = 1$ wird.

Zum Beweis der Behauptung für ein beliebiges $k\,(k < n)$ beachte man, daß man bei gegebenem $\delta > 0$ und $|P, P_0| < \delta$ die Differenz $|\lambda - \lambda_0|$ so klein wählen kann, daß P in A_{λ_0} und P_0 in A_λ liegen. Nun ist

$$|v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)| \leq |v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P)| + |v_k^{\lambda_0}(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)|,$$

und somit wird, da $\lim_{\lambda \to \lambda_0} |v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P)| = 0$ und $\lim_{P \to P_0} |v_k^{\lambda_0}(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)| = 0$ ist, $\lim_{\lambda \to \lambda_0} |v_k^\lambda(P) - v_k^{\lambda_0}(P_0)| = 0$. Das beweist die Behauptung.

Man bilde jetzt das Innere A_λ^* jedes A_λ auf das Innere T_0^* von T_0 mit Hilfe der Brunn-Minkowskischen Abbildung ab und bezeichne mit $x_k^\lambda = x_k^\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)$

[10]) Man vgl. darüber meinen Aufsatz: Über einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen. Z. Kristallogr. (A) **105**, 304—314 (1943).

($k=1, \ldots, n$; $\lambda \in J$) die dadurch entstehenden Funktionen. Das nächste Ziel wird sein, mit Hilfe dieser Transformation den Inhalt $|A|$ der Punktmenge $A = \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$ nach unten abzuschätzen. Man bilde nach dem Vorbild von 4. die RIEMANN-MINKOWSKIschen Summen

$$S = \sum_1^m |J_k|\, A_{\xi_k} \qquad (\xi_k \in J_k) \tag{9.2}$$

und wähle η so, daß für $\delta_M < \eta$ alle S in A^ε liegen, wobei diese, wie bereits erwähnt, die Parallelmenge von A in der Entfernung ε ist. Setzt man dann, bei festem S,

$$\eta_k = x_k^{\xi_1}(\tau_1, \ldots, \tau_k)\,|J_1| + \cdots + x_k^{\xi_l}(\tau_1, \ldots, \tau_k)\,|J_l|, \tag{9.3}$$

so ist offenbar

$$|A^\varepsilon| \geq \int_S d\eta_1 \ldots d\eta_n. \tag{9.4}$$

Man betrachte jetzt von jedem A_{ξ_k} denjenigen Teil A'_{ξ_k}, dessen Bild bei der BRUNN-MINKOWSKI-SCHMIDTschen Abbildung auf die Menge

$$T_\varepsilon\colon \quad \varepsilon \leq \tau_k \leq 1-\varepsilon \qquad (0<\varepsilon<\tfrac{1}{2};\ k=1, 2, \ldots, n) \tag{9.5}$$

abgebildet wird. Die entsprechende lineare Kombination der A'_{ξ_k} sei mit S' bezeichnet. Man kann leicht sehen, daß sowohl jedes A'_{ξ_k} als auch S' konvexe Punktmengen sind. Schreibt man dann für den Augenblick J für das Integral rechts in (9.4), so wird nach bekannten Sätzen

$$J = \int d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1} \int d\eta_n. \tag{9.6}$$

Auf die explizite Angabe der Integrationsgrenzen wird hier verzichtet. Man transformiere nun J auf die Veränderlichen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und beachte, daß dann

$$J \geq \int d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1} \int \frac{\partial \eta_n}{\partial \tau_n}\, d\tau_n = \int \frac{\partial \eta_n}{\partial \tau_n}\, d\tau_n \cdot d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1}$$

wird. Durch n-malige Wiederholung dieses Verfahrens wird schließlich

$$J \geq \int_{T_\varepsilon} \left\{ \prod_1^n \frac{\partial \eta_k}{\partial \tau_k} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{9.7}$$

Man denke sich jetzt die Funktionen $v_k^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda)$ als Funktionen des Punktes $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, indem man die $x_1^\lambda, \ldots, x_n^\lambda$ durch $x_1^\lambda(\tau_1), \ldots, x_n^\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ersetzt. Hält man λ fest, so gilt nach den vorherigen Entwicklungen

$$\frac{\partial x_k^\lambda}{\partial \tau_k} = \frac{v_{k-1}^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_{k-1}^\lambda)}{v_k^\lambda(x_1^\lambda, \ldots, x_k^\lambda)}, \tag{9.8}$$

und wir brauchen, um den Grenzübergang $\delta_M \to 0$ in (9.7) durchführen zu können, nur nachzuweisen, daß die rechte Seite hier (bei festem T und jedem k) in jeder Stetigkeitsstelle von A_λ stetig ist. Diese Behauptung ist

offenbar mit Rücksicht auf den Hilfssatz 7 für $k=1$ richtig. Man betrachte jetzt ein festes $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ und nehme an, es wäre für ein $k\,(1 \leq k \leq n)$

$$\lim_{\lambda' \to \lambda} v_{k-1}^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'}) = v_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda}), \tag{9.9}$$

wobei stets $x_r^{\lambda} = x_r^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ und $x_r^{\lambda'} = x_r^{\lambda'}(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ ist. Nun gilt nach den Entwicklungen von 8

$$\int_{-\infty}^{x_k^{\lambda}} v_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda}, \xi)\, d\xi = v_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda})\, \tau_k$$

und

$$\int_{-\infty}^{x_k^{\lambda'}} v_k^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'}, \xi)\, d\xi = v_{k-1}^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'})\, \tau_k.$$

Läßt man also $\lambda' \to \lambda$ konvergieren, so erhält man wegen (9.9)

$$\lim_{\lambda' \to \lambda} \int_{-\infty}^{x_k'} v_k^{\lambda'}(x_1^{\lambda'}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda'}, \xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{x_k} v_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda}, \xi)\, d\xi,$$

und somit auch (wenn man bedenkt, daß man den Grenzübergang $\lambda' \to \lambda$ unter dem Integralzeichen bedenkenlos ausführen kann) die Gleichungen $\underline{\lim}_{\lambda' \to \lambda} x_k^{\lambda'} = \overline{\lim}_{\lambda' \to \lambda} x_k^{\lambda'} = x_k^{\lambda}$. Daraus folgt aber

$$\lim_{\lambda' \to \lambda} x_k^{\lambda'}(\tau_1, \ldots, \tau_k) = x_k^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_k).$$

Man setze jetzt für den Augenblick bei konstantem $T(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

$$f_k(\lambda) = \frac{v_{k-1}^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_{k-1}^{\lambda})}{v_k^{\lambda}(x_1^{\lambda}, \ldots, x_k^{\lambda})} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.10}$$

und beachte, daß

$$\prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \eta_k}{\partial \tau_k} \right\} = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{l} f_k(\xi_\nu)\, |J_\nu| \right\}$$

ist und daß mit $\delta_M \to 0$ der Ausdruck rechts gegen $\prod_1^n \left\{ \int_0^1 f_k\, d\lambda \right\}$ konvergiert. Definiert man also die Funktionen $\varphi_k(\lambda)$ durch die Formel (7.11), so erhält man durch Anwendung von (7.9) die Ungleichung

$$|A^{\varepsilon}| \geq \int_{T_\varepsilon} \left\{ \int_0^1 (v_0^{\lambda})^{1/n}\, d\lambda \right\}^n d\tau_1 \ldots d\tau_n + \int_{T_\varepsilon} G(f)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n, \tag{9.11}$$

wobei $G(f)$ durch (7.10) definiert wird. Jetzt berücksichtige man, daß das Integral rechts gleich $(1-2\varepsilon)^n \left\{ \int_0^1 (v_0^{\lambda})^{1/n} d\lambda \right\}^n$ ist. Dann erhält man durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ mit Rücksicht darauf, daß $v_0^{\lambda} = |A_\lambda|$ ist,

$$\left| \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda \right| \geq \left\{ \int_0^1 |A_\lambda|^{1/n}\, d\lambda \right\}^n + \int_T G(f)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{9.12}$$

Hier ist natürlich das letzte Integral als Limes von Integralen $\int_{T_\varepsilon} G(f)\, d\tau_1 \dots d\tau_n$ für $\varepsilon \to 0$ aufzufassen. Soll nun

$$\left| \int_0^1 d\lambda\, A_\lambda \right|^{1/n} = \int_0^1 |A_\lambda|^{1/n}\, d\lambda \tag{9.12}$$

gelten, so muß $\int_T G(f)\, d\tau_1 \dots d\tau_n$ verschwinden, was mit Rücksicht auf die Struktur von $G(f)$ darauf hinausläuft, daß für $k = 1, \dots, n$ bis auf die üblichen Mengen

$$f_k = \frac{v_{k-1}^\lambda(x_1^\lambda, \dots, x_{k-1}^\lambda)}{v_k^\lambda(x_1^\lambda, \dots, x_k^\lambda)} = C_k(\tau_1, \dots, \tau_k)\, \varphi(\lambda) \tag{9.13}$$

gelten muß. Der Wert von $\varphi(\lambda)$ läßt sich durch Multiplikation dieser Gleichungen untereinander bestimmen. Man findet dann $\varphi(\lambda) = |A_\lambda|^{1/n} > 0$ und somit mit Rücksicht auf frühere Entwicklungen

$$|A_{\lambda'}|^{1/n} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau_k} = |A_\lambda|^{1/n} \frac{\partial x_k^{\lambda'}}{\partial \tau_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Beachtet man jetzt, daß die Koordinaten x_k^λ lediglich von $\tau_1, \dots, \tau_k$ abhängen, so folgt hieraus leicht die Behauptung. Am einfachsten sieht man das ein, wenn man sich nur auf die erste der Gln. (9.13) beschränkt, die Punktmengen A_λ auf ihren Schwerpunkt bezieht und die Richtung der x_1-Achse variieren läßt. Ist dann p_α^λ die Stützfunktion von A_λ in der Richtung $\alpha(\xi_1, \dots, \xi_n)$, so wird

$$|A_\lambda|^{1/n} p_\alpha^{\lambda'} = |A_\lambda|^{1/n} p_\alpha^\lambda. \tag{9.14}$$

Daraus läßt sich die Behauptung über das Eintreten des Gleichheitszeichens in (6.3) leicht ableiten.

Herrn Dr. W. FELSCHER habe ich an dieser Stelle, für wertvolle Hilfe bei der Durchsicht der Korrekturen, herzlichst zu danken.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 7. April 1956)

Meschkowski, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 189—202 (1956)

Rekursive reelle Zahlen

Von
Herbert Meschkowski

I. Einleitung

In den letzten Jahren sind mehrfach Versuche unternommen worden, die „konstruktiven" Methoden der Theorie der rekursiven Funktionen auch für die Analysis nutzbar zu machen (siehe z. B. Literaturverzeichnis [2], [5], [6], [7]). Die ersten wichtigen Ergebnisse sind von Specker [2] gewonnen worden. Er zeigt unter anderem Folgendes:

Es sei $\mathfrak{R}_1$ die Klasse der primitiv rekursiven reellen Zahlen, $\mathfrak{R}_2$ die der primitiv rekursiven Dezimalbrüche, $\mathfrak{R}_3$ die der primitiv rekursiven Schnitte. Dann gilt $\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \mathfrak{R}_3$, wobei die auftretenden Inklusionen echt sind. Damit hängt es zusammen, daß eine Reihe von Sätzen der klassischen Analysis nicht ohne weiteres in einer „rekursiven" gelten.

Nun hat Rice [4] nachgewiesen, daß die drei Klassen $\mathfrak{R}_\nu$ zusammenfallen, wenn man statt der „primitiven" Rekursivität der Zahlenfolgen die „allgemeine" zuläßt. Bei Rice wird aber der Begriff der reellen Zahl nicht „konstruktiv" begründet. Er benutzt (wie auch manche anderen Autoren) stillschweigend den klassischen Begriff der reellen Zahl und nennt eine solche Zahl dann „rekursiv", wenn sie der Grenzwert einer rekursiven und rekursiv konvergenten Folge rationaler Zahlen ist. Es wird dann bei den Beweisen benutzt ([4] S. 786), daß man entscheiden kann, ob eine natürliche Zahl y größer ist als eine „gegebene" reelle Zahl oder nicht. Wenn man sich an die den rekursiven Charakter der Zahl bestimmenden (gegen diese Zahl rekursiv konvergierenden) Folge hält, ist aber eine entsprechende Entscheidung ($a_n > y$ für $n \geqq N$) keineswegs immer zu vollziehen.

Auch die Aussage $\alpha = \beta$ für zwei reelle Zahlen wird unter Umständen problematisch, wenn man sie aus den Eigenschaften der rekursiven Folgen begründen will. Neben der von Rice u. a. benutzten „halbklassischen" Betrachtungsweise erscheint deshalb auch eine solche berechtigt, die den vertrauten Begriff der reellen Zahl nicht voraussetzt und von den rekursiven Folgen und ihren Eigenschaften ausgeht. Läßt man nur solche „konsequent konstruktiven" Methoden zu, so zeigt sich, daß der Nachweis für $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ bzw. $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$ nicht geführt werden kann (Kap. III dieser Arbeit). Dabei ist $\mathfrak{R}_1'$ die Klasse der allgemein rekursiven reellen Zahlen, $\mathfrak{R}_2'$ die der allgemein rekursiven Dezimalbrüche und $\mathfrak{R}_3'$ die der allgemein rekursiven Schnitte.

Andererseits gelten für die rekursiven und rekursiv konvergenten Folgen eine Reihe von Sätzen, die als Analoga gelten können für bekannte Sätze über reelle Zahlen (Kap. IV und V) und uns Mut machen können, auch in der Theorie der Funktionen „rekursive" Methoden einzuführen ([5], [6], [7]).

II. Definitionen

Erklärung 1. *Eine Folge $\Phi(n)$ rationaler Zahlen heißt rekursiv*[1]) *(bzw. primitiv rekursiv), wenn*

$$\Phi(n) = \frac{\varphi(n) - \psi(n)}{\chi(n)}$$

und die Folgen $\varphi(n), \psi(n)$ und $\chi(n)$ (primitiv) rekursive Funktionen sind.

Erklärung 2. *Eine (primitiv) rekursive Folge rationaler Zahlen heißt (primitiv) rekursiv konvergent, wenn es eine (primitiv) rekursive Funktion $N(n)$ gibt, so daß*[2])

$$\Phi(\mu) - \Phi(\nu) = o(m)$$

gilt für $\mu, \nu \geq N(m)$.

$\Phi(n)$ heißt *eine rekursive Nullfolge*, wenn es eine rekursive Funktion $N(m)$ gibt, so daß $\Phi(n) = o(m)$ für $n \geq N(m)$. Wir sagen auch: $\Phi(n)$ konvergiert rekursiv gegen die rationale Zahl $\frac{p}{q}$, wenn $\Phi(n) - \frac{p}{q}$ eine rekursive Nullfolge ist. Statt rekursiv und rekursiv konvergent soll auch kurz *regulär* gesagt werden.

Erklärung 3. *Zwei reguläre Folgen $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ heißen äquivalent (im Zeichen: $\approx$), wenn $\varphi(n) - \psi(n)$ eine reguläre Nullfolge ist.*

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir bei der in Erklärung 2 auftretenden Funktion $N(m)$ voraussetzen, daß

$$N(m+1) \geq N(m) \geq m \tag{1}$$

gilt.

Erklärung 4. *Eine reguläre Folge $\varphi(n)$ hat die Schnitteigenschaft, wenn es rekursive Funktionen $p(q)$ und $N(q)$ gibt, so daß*

$$\frac{p(q)}{q} \leq \varphi(n) < \frac{p(q)+1}{q}$$

für $n \geq N(q)$.

Erklärung 5. *Es seien $b_n = b(n)$ und $a_n = a(n)$ rekursive Funktionen, für die*

$$b(n) \geq 2, \quad a(n) \leq b(n) - 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

gilt. Dann heißen die rekursiven und rekursiv konvergenten Folgen

$$C(n) = a_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_n}{b_1 \cdot b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_1 \ldots b_n} \tag{3}$$

CANTOR-*Folgen. Für $b(n) = 10$ sprechen wir von rekursiven Dezimalfolgen, für $b(n) = n$ von Faktoriellenfolgen.*

[1]) „Rekursiv" ohne den Zusatz „primitiv" bedeutet in dieser Arbeit stets „allgemein rekursiv".

[2]) Für $|a| < \frac{1}{10^m}$ sagen wir nach GOODSTEIN: $a = o(m)$.

III. Bemerkungen zu den Sätzen von SPECKER

Nach [*1*, S. 279] gibt es zu einem „deduktiven Formalismus" F (der gewissen dort angegebenen Bedingungen genügt) eine primitiv rekursive Funktion $G(n)$, für die im Formalismus F weder die Aussage $(n)\,(G(n)=0)$ noch ihre Negation formal beweisbar ist.

Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ in einem solchen Formalismus F beweisbar. Dann definieren wir mit Hilfe der zu diesem Formalismus gehörenden primitiv rekursiven Funktion $G(n)$ [3]:

$$\varrho(n) = \mu_\nu\,(\nu \leq n \wedge G(\nu) > 0)$$

und

$$a(n) = 1 + \operatorname{sgn}\varrho(n) \cdot (-1)^{\varrho(n)} \cdot \frac{1}{10^{\varrho(n)}}. \tag{4}$$

$\varrho(n)$ ist eine primitiv rekursive Funktion, $a(n)$ eine (primitiv) rekursive Folge rationaler Zahlen. Man überzeugt sich leicht, daß $a(n)$ auch rekursiv konvergent ist: Für $m > n \geq N$ ist nämlich

$$|a(m) - a(n)| < \frac{1}{10^N}.$$

Das ergibt sich so: Für $a(m) = a(n)$ ist diese Ungleichung trivial. $a(m) \neq a(n)$ ist aber nur möglich, wenn $a(n) = 1$ und $a(m) \neq 1$ ist. Dann müßte das kleinste ν, für das $G(\nu) > 0$ ist, zwischen n und m liegen:

$$m \geq \varrho(m) > n \geq N.$$

Dann ist aber

$$|a(m) - a(n)| = |a(m)| < \frac{1}{10^{\varrho(m)}} < \frac{1}{10^N},$$

$a(n)$ ist also eine reguläre Folge. Es gibt aber gewiß keinen zu $a(n)$ äquivalenten Dezimalbruch

$$D(n) = d(0) + \frac{d(1)}{10} + \cdots + \frac{d(n)}{10^n}.$$

Denn es ist ja wegen der Eigenschaften von $a(n)$ schon nicht entscheidbar, ob $d(0)$, die „Stelle vor dem Komma", 0 oder 1 sein muß.

Die Annahme, daß $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ formal beweisbar sei, ist also falsch.

Wesentlich einfacher ist es, ein Beispiel einer rekursiven reellen Zahl anzugeben, für die nach dem gegenwärtigen Stand unseres Wissens eine Dezimalbruchentwicklung nicht angegeben werden kann. Wir wollen eine natürliche Zahl eine GOLDBACH-Zahl nennen, wenn $2n$ als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann. Nach der (nicht bewiesenen) GOLDBACHschen Vermutung sind alle natürlichen Zahlen GOLDBACH-Zahlen.

---

[3] $\sigma(n) = \mu_\nu\,(\nu \leq \wedge\, \mathfrak{A}(\nu))$ heißt: $\sigma(n)$ ist gleich dem kleinsten $\nu \leq n$, für das die Aussage $\mathfrak{A}(\nu)$ richtig ist, wenn ein solches x existiert; sonst ist $\sigma(n) = 0$.

Die Aussage „n ist eine GOLDBACH-Zahl" kann so formalisiert werden:

$$(E\,p)\,(E\,q)\,[p < 2n \wedge q < 2n \wedge S(p) \leqq 2 \wedge S(q) \leqq 2 \wedge 2n = p + q].$$

Dabei ist $S(p)$ die (primitiv rekursive) Funktion, die die Anzahl der Teiler von p angibt (einschließlich 1 und p). Es gibt dann eine primitiv rekursive Funktion $g(n)$, die genau dann gleich 0 ist, wenn unsere Aussage richtig ist, sonst aber den Wert (1) annimmt. Mit Hilfe dieser Funktion $g(n)$ definieren wir

$$\varrho^*(n) = \mu_\nu\big(\nu \leqq n \wedge g(\nu) = 1\big)$$

und

$$a^*(n) = 1 + \operatorname{sgn} \varrho^*(n)\,(-1)^{\varrho^*(n)} \frac{1}{10^{\varrho^*(n)}}.$$

Dann hat $a^*(n)$ ähnliche Eigenschaften wie $a(n)$. Solange die GOLDBACHsche Vermutung nicht bewiesen ist, kann auch keine zu $a^*(n)$ äquivalente Dezimalfolge angegeben werden.

Eine entsprechende Aussage ist möglich über die Beweisbarkeit von $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$. Wir benutzen dabei wieder wie oben die Funktion $\varrho(n)$ und erklären:

$$(5) \qquad c(n) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \operatorname{sgn} \varrho(n) \frac{1}{10^{\varrho(n)}}.$$

Der letzte Summand von $c(n)$ hat den Wert 0 oder $10^{-\nu}$, wobei $\nu \leqq n$. $c(n)$ ist also von der Form

$$c(n) = \frac{e_1}{10} + \frac{e_2}{10^2} + \cdots + \frac{e_n}{10^n},$$

wobei alle Zahlen e_ν bis auf eine gleich 3 sind. Diese eine könnte gleich 4 sein: Jedenfalls ist im Formalismus F nicht beweisbar, daß *alle* e_ν gleich 3 sind.

Die durch (5) definierte Folge ist also eine Dezimalfolge, für die Schnitteigenschaft nicht in F beweisbar ist. Denn es ist ja nicht entscheidbar, ob (von einer gewissen Nummer an) $c(n)$ größer oder kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$ kann also nicht in F beweisbar sein.

Ein ähnliches Beispiel kann natürlich wieder mit Hilfe der Funktion $\varrho^*(n)$ gebildet werden. Wir haben also

Satz 1. Die Aussagen $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_2'$ und $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_3'$ sind nicht formal beweisbar[4]).

IV. Schnitteigenschaften der regulären Folgen

Es ist bekannt [3], daß die Faktoriellenfolgen

$$\psi(n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\chi(\nu)}{\nu!} \qquad \big(\chi(\nu) \leqq \nu - 1\big)$$

die Schnitteigenschaft haben. Es gilt

$$\frac{p-1}{q} \leqq \psi(n) < \frac{p}{q} \qquad \text{für } n > q,$$

[4]) Vergleiche dazu Satz 2 von [7].

wobei

$$p = [q \cdot \varphi(q)] + 1 .$$

Das folgt leicht aus der Tatsache, daß

$$[\varphi(n) \cdot q] = [\varphi(q) \cdot q] \qquad \text{für } n \geqq q .$$

In dem Buch von R. PETER [3] wird auch gezeigt, daß umgekehrt jeder irrationalen Zahl r mit der Schnitteigenschaft eine CANTOR-Folge zugeordnet werden kann, die gegen r konvergiert. Der Beweis benutzt aber Ungleichungen mit „gegebenen" Irrationalzahlen. Wir wollen (im Sinne von Kap. 1) unter Verringerung der Voraussetzungen entsprechende Aussagen ableiten für reguläre Folgen.

Erklärung 6. *Eine reguläre Folge* $\varphi(n)$ *(mit* $\varphi(n) \geqq 0$[5]*) hat die Schnitteigenschaft für den Nenner* q*, wenn es eine ganze Zahl* p *und eine natürliche Zahl* N *gibt, so daß*

$$\frac{p}{q} \leqq \varphi(n) < \frac{p+1}{q}$$

gilt für $n \geqq N(q)$.

$\varphi(n)$ *hat die Schnitteigenschaft für eine Folge von Nennern* $q_1, q_2, q_3, \ldots$ $(q_n = q(n)$ *sei rekursiv), wenn es eine rekursive Funktion* $p(\nu)$ *und eine rekursive monoton nicht fallende Funktion* $N(\nu)$ *gibt, so daß*

$$\frac{p(\nu)}{q_\nu} \leqq \varphi(n) < \frac{p(\nu)+1}{q_\nu}$$

gilt für $n \geqq N(\nu)$.

Die Folge $1 + (-1)^n \frac{1}{n}$ hat offenbar die Schnitteigenschaft für alle $q \neq 1$, die Folge $c(n)$ in (5) hat die Schnitteigenschaft *nicht* für solche Nenner q, die 3 als Primfaktor enthalten.

Satz 2. *Es sei* $\Phi(n)$ *eine reguläre Folge, die für die Nenner*

$$1, b_1, b_1 b_2, b_1 b_2 b_3, \ldots$$

die Schnitteigenschaft hat. Dabei soll $b_n = b(n)$ *eine rekursive Funktion mit* $b(n) \geqq 2$ *sein. Dann gibt es eine zu* $\Phi(n)$ *äquivalente* CANTOR*-Folge*

$$\psi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_1 \cdot b_2} + \cdots + \frac{c_n}{b_1 \cdot b_2 \ldots b_n}$$

mit $c_\nu \leqq b_\nu - 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Die Voraussetzungen können wir auch so formulieren:

Es gibt zwei rekursive Funktionen $d(k) = d_k$ und $N(k)$, so daß

$$C \leqq \Phi(n) < C + 1 \qquad (C \text{ ganz}) \tag{6}$$

[5]) Für Folgen mit negativem bzw. wechselndem Vorzeichen kann man die Definition sinngemäß variieren.

gilt[6]) für $n \geqq N(0)$ und

$$\frac{d_k}{b_1 \dots b_k} \leqq \Phi(n) - C < \frac{d_k + 1}{b_1 \dots b_k} \tag{7}$$

für $n \geqq N(k)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Wir setzen nun $\Phi(n) - C = \Phi_0(n)$ und

$$\Phi_0(n) = \frac{c_1}{b_1} + \dots + \frac{c_{k-1}}{b_1 \dots b_{k-1}} + \frac{\Phi_k(n)}{b_1 \dots b_k}. \tag{8}$$

Die Zahlen c_k sind dabei rekursiv so definiert:

$$c_0 = 0, \quad c_k = d_k - (a b_2 \dots b_k + \dots + c_{k-1} b_k) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots. \tag{9}$$

Es wird also

$$c_1 = d_1, \; c_2 = d_2 - c_1 b_2, \quad \text{usf.}$$

Aus (7), (8) und (9) folgt

$$c_k \leqq \Phi_k(n) < c_k + 1 \tag{10}$$

für $n \geqq N(k)$. Aus (9) ergibt sich aber weiter:

$$c_{k+1} = d_{k+1} - (c_1 b_2 \dots b_k + \dots + c_{k-1} b_k)\, b_{k+1} - c_k b_{k+1}$$

oder

$$b_{k+1}(d_k - c_k) = d_{k+1} - c_{k+1} - c_k b_{k+1},$$

also

$$c_{k+1} = d_{k+1} - d_k b_{k+1}. \tag{11}$$

Aus (7) folgt nun wegen der Monotonie von $N(k)$:

$$\frac{d_k}{b_1 \dots b_k} \leqq \frac{d_{k+1}}{b_1 \dots b_{k+1}} < \frac{d_{k+1} + 1}{b_1 \dots b_{k+1}} \leqq \frac{d_k + 1}{b_1 \dots b_k}. \tag{12}$$

Also haben wir

$$d_k \cdot b_{k+1} \leqq d_{k+1}, \tag{13}$$

$$d_{k+1} + 1 \leqq d_k \cdot b_{k+1} + b_{k+1}, \tag{14}$$

und nach (11), (13) und (14):

$$0 \leqq c_{k+1} \leqq b_{k+1} - 1. \tag{15}$$

Daß auch $0 \leqq c_1 \leqq b_1 - 1$ gilt, ergibt sich so: Nach (8) ist

$$\Phi_1(n) = \Phi_0(n) \cdot b_1 = \big(\Phi(n) - C\big)\, b_1;$$

nach (10) und (6) folgt daher

$$c_1 \leqq \Phi_1(n) < b_1.$$

Damit ist zunächst gezeigt, daß die Koeffizienten c_k sich rekursiv aus $b(k)$ und $d(k)$ bestimmen lassen, so daß (15) gilt. Die rekursive Konvergenz

[6]) Hier ist die Schnitteigenschaft für den Nenner 1 benutzt.

von $\psi(n)$ folgt jetzt so: Es ist für $m > n \geqq N$:

$$\psi(m) - \psi(n) = \frac{c_{n+1}}{b_1 \dots b_{n+1}} + \dots + \frac{c_m}{b_1 \dots b_m}$$
$$\leqq \frac{b_{n+1} - 1}{b_1 \dots b_{n+1}} + \dots + \frac{b_m - 1}{b_1 \dots b_m} < \frac{1}{b_1 \dots b_n} < \frac{1}{2^N} < \frac{1}{10^{N/4}}.$$

Also ist $\psi(m) - \psi(n) = o(k)$ für $N \geqq N(k) = 4k$.

Ähnlich ergibt sich die Äquivalenz von $\psi(n)$ und $\Phi(n)$. Es ist

$$|\Phi(n) - \psi(n)| = \frac{\Phi_{k+1}(n)}{b_1 \dots b_{k+1}} < \frac{c_{k+1} + 1}{b_1 \dots b_{k+1}} \leqq \frac{1}{b_1 \dots b_k} \leqq \frac{1}{2^k}.$$

Damit ist alles bewiesen.

Wir haben also das Ergebnis, daß wir einer regulären Folge $\Phi(n)$ genau dann eine äquivalente Faktoriellenfolge zuordnen können, wenn $\Phi(n)$ für *alle* Nenner n die Schnitteigenschaft hat. Zur Herstellung einer äquivalenten Dezimalfolge brauchen wir die Schnitteigenschaft für die Potenzen von 10, usf. Für die durch (5) definierte Folge kann nicht nur ein äquivalenter Dezimalbruch angegeben werden, sondern auch eine CANTOR-Folge mit beliebigen b_ν, die den Primfaktor 3 nicht enthalten.

Satz 3. *Eine* CANTOR-*Folge*

$$\psi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_1 \cdot b_2} + \dots + \frac{c_n}{b_1 \dots b_n}$$

hat die Schnitteigenschaft für die Nenner $b_1, b_2, b_3, \dots$, *und zwar gilt*

$$\frac{p(q)}{b(q)} \leqq \psi(n) < \frac{p(q) + 1}{b(q)}$$

für $n \geqq q$ *und* $p(q) = [\psi(q) \cdot b(q)] + 1$.

Zum Beweis schreiben wir $\psi(n)$ in der Form

$$\psi(n) = \psi(\nu) + \frac{c_{\nu+1}}{b_1 \dots b_{\nu+1}} + \dots + \frac{c_n}{b_1 \dots b_n}.$$

Dann wird wegen $c_\nu \leqq b_\nu - 1$:

$$\psi(n) \cdot b_\nu - \psi(\nu)\, b_\nu \leqq \frac{(b_{\nu+1} - 1)}{b_1 \dots b_{\nu+1}} + \dots + \frac{(b_n - 1)\, b_\nu}{b_1 \dots b_n} < \frac{1}{b_1 \dots b_{\nu-1}}.$$

Nun ist $\psi(\nu) \cdot b_\nu$ ein Bruch mit dem Nenner $b_1 b_2 b_3 \dots b_\nu$. Da nach unserer Ungleichung $\psi(n) \cdot b_\nu$ nur um *weniger* als $\frac{1}{b_1 \dots b_{\nu-1}}$ größer sein kann als $\psi(\nu) \cdot b_\nu$, gilt

$$[\psi(n) \cdot b_\nu] = [\psi(\nu)\, b_\nu]. \tag{16}$$

Setzt man jetzt

$$p(q) = [\psi(q) \cdot b_q] + 1 = [\psi(q) \cdot b(q)] + 1,$$

so folgt

$$\frac{p(q) - 1}{b(q)} \leqq \psi(n) < \frac{p(q)}{b(q)},$$

q. e. d.

R. PETER hat kürzlich [3, S. 193] eine interessante Aussage über irrationale Zahlen bewiesen, die mit den hier behandelten Fragen zusammenhängt. Wenn eine Zahl r (im klassischen Sinne) irrational ist, dann gibt es zu jedem Bruch $\frac{p}{q}$ eine (rationale) Zahl $k > 0$ und ein N, so daß $\left| a_n - \frac{p}{q} \right| > k$ gilt für eine gegen r konvergierende Folge rationaler Zahlen (falls $n > N$). Wenn nun — das ist der Satz von R. PETER — diese Aussage in dem Sinne „effektiv" ist, daß es zwei rekursive Funktionen $\varkappa(p, q)$ und $\nu(p, q)$ gibt, so daß für alle $n \geq \nu(p, q)$

$$\left| a_n - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{\varkappa(p, q)}$$

gilt, dann hat die irrationale Zahl r die Schnitteigenschaft, d.h. es gibt eine rekursive Beziehung in m und n, die der Aussage $\frac{m}{n} > r$ äquivalent ist.

Wir wollen unter Vermeidung von Ungleichungen mit irrationalen Zahlen eine Verallgemeinerung dieses Satzes und eine weitere damit zusammenhängende Aussage beweisen.

Satz 4. *Es sei $\varphi(n)$ eine reguläre Folge, $b_\nu = b(\nu)$ eine rekursive Funktion mit $b(\nu) \geq 2$,*

$$q_0 = 1 \quad \textit{und} \quad q_\nu = b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_\nu \quad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots .$$

Wenn es zwei rekursive Funktionen $F(\nu)$ und $G(\nu)$ gibt, so daß

$$\left| \varphi(n) - \frac{p}{q_\nu} \right| > \frac{1}{F(\nu)} \tag{17}$$

gilt für $n \geq G(\nu)$, dann hat $\varphi(n)$ die Schnitteigenschaft für alle Nenner q_ν (Erklärung 6)[7]).

Für $b_n = n$ folgt daraus dann die allgemeine Schnitteigenschaft wie bei R. PETER.

Zum Beweis bezeichnen wir die „Stellenzahl" (im Dezimalsystem) von $F(\nu)$ mit $St(F(\nu))$:

$$St(F(\nu)) = \mu_x[F(\nu) < 10^x \wedge x < F(\nu)]$$

und setzen[8])

$$I(\nu) = \operatorname{Max}(St(F(\nu)), G(\nu)), \qquad N(I(\nu)) = M(\nu). \tag{18}$$

$M(\nu)$ ist dann eine rekursive Funktion von ν. Dann gilt

$$|\varphi(n) - \varphi(M(\nu))| < \frac{1}{F(\nu)} \tag{19}$$

für $n \geq M(\nu)$. Denn es ist doch nach (18):

$$|\varphi(n) - \varphi(N(I(\nu)))| < \frac{1}{10^{I(\nu)}} \leq \frac{1}{10^{St(F(\nu))}} \leq \frac{1}{F(\nu)}.$$

[7]) Auf eine Abhängigkeit von p kann bei der Funktion $F(\nu)$ verzichtet werden, weil die Abschätzung (17) ja nur interessant ist für die Zahl p, die den größten Wert für $F(\nu)$ erfordert.

[8]) Dabei ist $N(k)$ die rekursive Funktion, die gemäß Erklärung 2 zur gegebenen Folge $\varphi(n)$ gehört.

Andererseits ist

(20) $$\left|\varphi(M(\nu)) - \frac{p}{q_\nu}\right| = \left|\varphi(N(I_\nu)) - \frac{p}{q_\nu}\right| > \frac{1}{F(\nu)}.$$

Denn nach (1) und (18) gilt doch für alle ν:

$$N(I(\nu)) \geqq I(\nu) \geqq G(\nu).$$

Wir setzen jetzt

$$p_\nu = [q_\nu \cdot \varphi(M(\nu))] + 1.$$

Dann gilt also:

(21) $$\frac{p_\nu - 1}{q_\nu} \leqq \varphi(M(\nu)) < \frac{p_\nu}{q_\nu}.$$

Nach (20) ist dann

$$\varphi(M(\nu)) - \frac{p_\nu - 1}{q_\nu} > \frac{1}{F(\nu)} \quad \text{und auch} \quad \frac{p_\nu}{q_\nu} - \varphi(M(\nu)) > \frac{1}{F(\nu)},$$

denn (20) gilt ja für *alle* p.

$\varphi(M(\nu))$ hat also von den durch (21) gesetzten Schranken einen Abstand, der größer ist als $\frac{1}{F(\nu)}$. Wegen (19) muß deshalb auch $\varphi(n)$ für $n \geqq M(\nu)$ zwischen diesen Schranken liegen:

$$\frac{p_\nu - 1}{q_\nu} \leqq \varphi(n) < \frac{p_\nu}{q_\nu} \quad \text{für} \quad n \geqq M(\nu).$$

Das heißt aber: $\varphi(n)$ hat die Schnitteigenschaft für die Nenner q_ν, q.e.d.

Nun kann man umgekehrt fragen, ob eine gegebene CANTOR-Folge für alle Nenner $q_\nu = b_1 \dots b_\nu$ einen durch eine rekursive Funktion festgelegten Abstand von allen Brüchen p/q_ν hat, wie es in (17) vorausgesetzt war. Das ist deshalb nicht zu erwarten, weil ja die CANTOR-Folge

$$\Phi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \dots + \frac{c_n}{b_1 \dots b_n}$$

gegen eine rationale Zahl konvergieren kann, und zwar rekursiv. Das ist dann der Fall, wenn von einer gewissen Nummer an alle $c_n = 0$ werden oder $c_n = b_n - 1$ gilt für $n \geqq N$. In diesem Fall konvergiert die Folge, wie man leicht einsieht, rekursiv gegen die rationale Zahl

$$C + \frac{c_1}{b_1} + \dots + \frac{c_{N-1} + 1}{b_1 \dots b_{N-1}}.$$

Nehmen wir deshalb an, daß die Voraussetzungen

(22) $$\begin{cases} (\nu)\,(E\sigma)\,[c_\nu = 0 \to c_{\nu+\sigma} \neq 0], \\ (\nu)\,(E\sigma)\,[c_\nu = b_\nu - 1 \to c_{\nu+\sigma} < b_{\nu+\sigma} - 1] \end{cases}$$

erfüllt seien. Es ist natürlich durchaus möglich, daß für eine vorgelegte Folge *nicht* entscheidbar ist, ob (22) gilt oder nicht. Es ist nicht schwer, dafür (mit ähnlichen Mitteln wie im vorigen Kapitel) Beispiele anzugeben.

Satz 5. *Es sei*

$$\Phi(n) = C + \frac{c_1}{b_1} + \cdots + \frac{c_n}{b_1 \cdots b_n}$$

eine CANTOR*-Folge, für die* (22) *gilt. Dann gibt es zwei (allgemein) rekursive Funktionen* $\gamma(\nu)$ *und* $\delta(\nu)$*, so daß*

$$\left| \Phi(n) - \frac{p}{q_\nu} \right| \geq \frac{1}{\delta_\nu}$$

gilt für $n \geq \gamma(\nu)$ *und alle* p[9]).

Wegen (22) sind die Funktionen

$$\alpha(\nu) = \mu_\tau[\tau > \nu \wedge c_\tau \neq 0]$$

und

$$\beta(\nu) = \mu_\sigma[\sigma > \nu \wedge c_\sigma < b_\sigma + 1]$$

(allgemein) rekursiv. Dann ist für

$n \geq \gamma(\nu) = \operatorname{Max}(\alpha(\nu), \beta(\nu))$:

$$\Phi(\nu) + \frac{1}{b_1 \cdots b_{\alpha(\nu)}} \leq \Phi(n) \leq \Phi(\nu) + \frac{b_{\nu+1} - 1}{b_1 \cdots b_{\nu+1}} + \cdots + \frac{b_n - 1}{b_1 \cdots b_n} - \frac{1}{b_1 \cdots b_{\beta(\nu)}}$$

$$= \Phi(\nu) + \frac{1}{b_1 \cdots b_\nu} - \frac{1}{b_1 \cdots b_n} - \frac{1}{b_1 \cdots b_{\beta(\nu)}}$$

oder

$$\Phi(\nu) + \frac{1}{q(\alpha(\nu))} \leq \Phi(n) < \Phi(\nu) + \frac{1}{q(\nu)} - \frac{1}{q(\beta(\nu))}. \tag{23}$$

$\Phi(n)$ liegt also im Intervall $\left[\Phi(\nu);\ \Phi(\nu) + \frac{1}{q(\nu)}\right]$ und hat von den Eckpunkten einen Abstand, der mindestens gleich

$$\frac{1}{q(\alpha(\nu))} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{q(\beta(\nu))}$$

ist. Nun ist $\Phi(\nu)$ ein Bruch mit dem Nenner $q(\nu)$: $\Phi(\nu) = \frac{l(\nu)}{q(\nu)}$. Für $n \geq \gamma(\nu)$ ist dann

$$\frac{1}{q(\alpha(\nu))} \leq \Phi(n) - \frac{l(\nu)}{q(\nu)} \quad \text{und} \quad \frac{l(\nu)+1}{q(\nu)} - \Phi(n) > \frac{1}{q(\beta(\nu))}.$$

Es gilt also

$$\left| \Phi(n) - \frac{p}{q_\nu} \right| \geq \frac{1}{\delta(\nu)}$$

mit

$$\delta(\nu) = q(\gamma(\nu)) \quad \text{für} \quad n \geq \gamma(\nu).$$

Diese Ungleichung gilt zunächst für $p = l_\nu$ bzw. $p = l_\nu + 1$, dann aber a fortiori für alle andern natürlichen Zahlen p wegen (23).

[9]) $q_\nu = q(\nu)$ hat wieder dieselbe Bedeutung wie in Satz 4.

V. Äquivalente Folgen

In der klassischen Theorie kann man jeder reellen Zahl einen Dezimalbruch oder auch irgendeine andere CANTOR-Folge zuordnen. Es liegt die Frage nahe, wie weit man den regulären Folgen äquivalente Folgen zuordnen kann, die besonders einfach zu übersehen sind. Bevor wir solche „positiven" Möglichkeiten suchen, wollen wir auf einige bemerkenswerte Unterschiede der rekursiven Theorie gegenüber der klassischen hinweisen.

Stellen wir zunächst fest, daß man zu jeder regulären Folge $c(n)$ eine zweite angeben kann, für die nicht entscheidbar ist, ob sie zur ersten äquivalent ist oder nicht. Eine solche Folge erhält man, wenn man zu $c(n)$ die Folge $a(n)-1$ addiert, die durch (4) definiert wurde. $a(n)-1$ ist zwar regulär, aber es ist nicht entscheidbar, ob diese Folge eine reguläre Nullfolge ist. Weiter gilt

Satz 6. *Zu jeder regulären Folge $c(n)$ läßt sich eine rekursive Folge rationaler Zahlen $d(n)$ angeben, die im klassischen Sinne gegen denselben Grenzwert konvergiert wie $c(n)$, aber nicht mehr rekursiv konvergent ist.*

Zum Beweis ziehen wir die bei R. PETER [3, S. 152] definierte Funktion $\varrho(m, n)$ heran. Sie ist primitiv rekursiv, aber das Prädikat

$$(Ex) \quad (\varrho(m, x) = 0) \tag{24}$$

ist nicht entscheidbar[10]).

Mit $\varrho(m, x)$ definiert nun R. PETER die Funktion

$$\psi(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (x)\ (x \leq n \to \varrho(m, x) \neq 0) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{25}$$

Wir setzen weiter

$$\alpha_n = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\psi(\mu, n+1) - \psi(\mu, n)}{2^\mu}. \tag{26}$$

Aus der Definition folgt, daß jeder Summand von α_n nichtnegativ ist. Weiter ist

$$S_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\psi(\mu, n+1)}{2^\mu} < 1.$$

Da S_n beschränkt ist, bilden die α_n in der klassischen Theorie eine Nullfolge. Nehmen wir nun an, α_n sei eine *reguläre* Nullfolge. Es gibt dann also eine rekursive Funktion $N(k)$, so daß $\alpha_n = o(k)$ gilt für $n \geq N(k)$.

Von den Summanden von α_n liefern aber wegen der Definition von $\psi(m, n)$ nur diejenigen einen positiven Beitrag, für die

$$\psi(\mu, n+1) = 1, \qquad \psi(\mu, n) = 0$$

[10]) Dieses Prädikat ist nämlich der Aussage gleichwertig: m ist die Gödel-Nummer einer allgemein rekursiven Funktion, und x ist die „Ableitung" dieser Funktion für den Argumentwert m.

ist. Da alle Summanden von α_n nichtnegativ sind, müßte

$$\psi(\mu, n+1) = 2^{\mu} \cdot o(k)$$

sein für $n \geqq N(k)$, also

$$\psi(\mu, n+1) = 2^{\mu} \cdot o(\mu) < 1$$

für $n \geqq N(\mu)$. Das heißt aber: $\psi(\mu, n) = 0$ für $n \geqq N(\mu)$. Dies Ergebnis wäre aber so zu deuten: Wenn für irgendein n der „Sprung" der ψ-Funktion erfolgt:

$$\psi(\mu, n) = 0, \quad \psi(\mu, n+1) = 1,$$

dann kann dieses n nicht zu groß sein, es gilt vielmehr: $n < N(\mu)$. Das kleinste x also, für das $\varrho(m, x) = 0$ wird, muß also kleiner als $N(\mu)$ sein. Dann wäre aber das Prädikat (24) äquivalent mit

$$(27) \qquad (Ex) \quad \big(x \leqq N(m) \wedge \varrho(m, x) = 0\big).$$

(27) ist aber [wegen der rekursiven Grenze $N(m)$] rekursiv, und das ist ein Widerspruch. Also ist α_n *keine rekursive* Nullfolge.

Addiert man α_n zu irgendeiner gegebenen regulären Folge $c(n)$, so wird diese „verdorben": $\beta(n) = c(n) + \alpha(n)$ konvergiert noch im klassischen Sinne gegen denselben Grenzwert wie $c(n)$, aber diese Folge ist nicht mehr rekursiv konvergent.

Wir wollen nun die Frage behandeln, wie man einer gegebenen regulären Folge eine äquivalente Folge in irgendeiner geeigneten „Normalform" zuordnen kann. Wenn für die Folge gewisse „Schnitteigenschaften" feststehen, ist die Zuordnung einer CANTOR-Folge möglich nach den in Kap. IV angegebenen Sätzen. In *jedem* Fall ist aber eine wohlbestimmte „Intervallschachtelung" möglich, die eine monoton wachsende und eine monoton fallende Folge liefert, die beide der gegebenen äquivalent sind.

Sei etwa $\Phi(n)$ die reguläre Folge und $\Phi(n) - \Phi(m) = o(k)$ für $n \geqq N(k)$. Dann ist also

$$k \cdot \Phi(n) = k \cdot \Phi\big(N(k)\big) + k \cdot o(k).$$

Falls nun die erste Dezimale von $k \cdot \Phi\big(N(k)\big)$ von 0 und 9 verschieden ist

$$\alpha(k) = [10\, k \cdot \Phi(N(k))] - 10\,[k \cdot \Phi(N(k))] \neq 0, \neq 9,$$

so gilt wegen $k \cdot o(k) < \frac{1}{10}$:

$$[k \cdot \Phi(n)] = [k \cdot \Phi(N(k))] = l \quad \text{und} \quad \frac{l}{k} \leqq \Phi(n) < \frac{l+1}{k}.$$

Wenn aber $\alpha(k) = 9$ ist, so gilt statt dessen

$$\frac{2l+1}{2k} \leqq \Phi(n) < \frac{2l+3}{2k},$$

und für $\alpha(k) = 0$ haben wir die entsprechende Ungleichung mit den Zählern $2l-1$ und $2l+1$. Um diese Möglichkeiten zusammenzufassen, definieren

wir die primitiv rekursive Funktion

$$(28)\qquad \varepsilon_1(k) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \alpha(k) = 9, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \varepsilon_2(k) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \alpha(k) = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir beschränken uns nun auf Nenner von der Form $k = 10^\varrho$ und erhalten dann

Satz 7. *Sei $\Phi(n)$ eine reguläre Folge und $N(k)$ die gemäß Erklärung 2 zugeordnete rekursive Funktion,*

$$x(\varrho) = \frac{2[10^\varrho \cdot \Phi(N(10^\varrho))] + \varepsilon_1(10^\varrho) + \varepsilon_2(10^\varrho)}{2 \cdot 10^\varrho},$$

$$y(\varrho) = \frac{2[10^\varrho \cdot \Phi(N(10^\varrho))] + \varepsilon_1(10^\varrho) + \varepsilon_2(10^\varrho) + 2}{2 \cdot 10^\varrho}.$$

Dann gilt

$$x(\varrho) < x(\varrho+1) < y(\varrho) < y(\varrho+1)$$

und

$$x(\varrho) \leqq \Phi(n) < y(\varrho) \qquad \text{für } n \geqq N(10^\varrho).$$

Dies Ergebnis steht keineswegs im Gegensatz der Tatsache, daß nicht immer zur gegebenen regulären Folge eine äquivalente Dezimalfolge gefunden werden kann. Nehmen wir als Beispiel die durch (4) definierte Folge $a(n)$. Die Folgen $x(n)$ und $y(n)$ würden hier so aussehen:

$$0{,}5\,;\ 0{,}95\,;\ 0{,}995 \ldots 1{,}005\,;\ 1{,}05\,;\ 1{,}5\,.$$

Es ist nicht entscheidbar, ob nicht etwa die Folge der $x(n)$ für irgendein n die 1 überschreitet.

Wenn man eine Theorie der Funktionen rekursiv begründen will, kann man sich nicht auf solche regulären Folgen beschränken, die eine äquivalente Dezimalbruchentwicklung (oder gar eine Faktoriellenentwicklung) zulassen. Man muß doch mit diesen Folgen rechnen. Und man sieht leicht, daß etwa die Summe oder die Differenz zweier regulärer Folgen wieder regulär ist. Aber zur Summe oder Differenz zweier Dezimalfolgen kann man nicht immer eine äquivalente Dezimalfolge angeben.

Nun bieten auch die regulären Folgen mit der zugehörigen Intervallschachtelung durchaus die Möglichkeit, die Analoga gewisser klassischer Sätze über stetige Funktionen zu begründen ([5] und [7]). Und man kann dazu definieren:

Erklärung 7. *Eine rekursive und rekursiv konvergente Folge rationaler Zahlen heißt eine reelle Zahl. Zwei reelle Zahlen heißen äquivalent,*

$$\{\varphi(n)\} \approx \{\psi(n)\},$$

wenn $\varphi(n) - \psi(n)$ eine reguläre Nullfolge ist.

Die Äquivalenz rekursiver reeller Zahlen ist eine symmetrische, transitive und reflexive Beziehung.

Man könnte daran denken, nicht die einzelne rekursive Folge, sondern die Klasse der äquivalenten Folgen als rekursive reelle Zahl zu definieren. Es bestehen aber Bedenken, den Begriff der reellen Zahl auf eine solche Mengendefinition zu begründen, weil es nicht immer entscheidbar ist, ob zwei vorgegebene reguläre Folgen äquivalent sind oder nicht.

Literatur

[1] HILBERT-BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, Bd. 2. Berlin 1939. — [2] SPECKER: Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. of Symb. Logic **14**, No. 3, 145—158 (1949). — [3] PETER: Rekursive Funktionen. Budapest 1951. — [4] RICE: Recursive real numbers. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 784—791 (1954). — [5] GOODSTEIN: The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory. Acta mathematica **92**, 171—190 (1954). — [6] GOODSTEIN: The recursive irrationality of π. J. of Symb. Logic **19**, No. 4, 267—274 (1954). — [7] MESCHKOWSKI: Zur rekursiven Funktionentheorie. Acta mathematica **95**, 9—23 (1956).

Berlin-Dahlem, Thielallee 66

(Eingegangen am 19. Juni 1956)

Physik

Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen.

Von Dr. Ch. Gerthsen, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Vierte Auflage. Mit 647 Abbildungen. XV, 545 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 29.80

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Längen- und Zeitmessungen. — Grundlagen der Mechanik des Massenpunktes. — Energie und Impuls. — Mechanik der starren Körper. — Mechanik der deformierbaren Körper. — Allgemeine Schwingungslehre. — Wellenlehre und Akustik. — Temperatur und Wärmemenge. — Die Hauptsätze der Wärmelehre. — Stoffe in verschiedenen Aggregatzuständen. — Elektrostatik und Magnetostatik. — Stationäre Ströme und Stromquellen. — Statische und langsam veränderliche Magnetfelder und ihre Wirkungen auf Ströme und bewegte elektrische Ladungen. — Materie in Magnetfeldern. — Technische Anwendungen des Induktionsgesetzes. — Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. — Korpuskularstrahlen und Gasentladungen. — Struktur der Atome. Radioaktivität und Kernphysik. — Geometrische Optik. — Wellenoptik. — Die Lichtstrahlung. — Atombau und Spektren. — Geometrische Elektronenoptik. — Wellenmechanik. — Anhang. Wichtige physikalische Konstanten. — Verzeichnis der Tabellen. — Sachverzeichnis.

Der Charakter des im Jahre 1948 in erster Auflage erschienenen Werkes wich in mancher Hinsicht von dem üblicher Lehrbücher der Physik ab. Es sollte nicht statt, sondern neben der großen Vorlesung über Experimentalphysik verwendet werden. Der Verfasser vertritt den Standpunkt, daß der naturwissenschaftliche Inhalt der physikalischen Erkenntnis in möglichst anschaulicher Form dem Anfänger vorgetragen werden soll, daß klare und übersichtliche Experimente die Formulierung der Gesetze begründen und daß die Theorie ihm nicht nur angedeutet, sondern, wo überhaupt möglich, auch mit Strenge begründet werden soll. Das erstere kann nur die Vorlesung vermitteln. Die Bearbeitung der Theorie erfordert aber so viel Muße, daß das häusliche Studium den wesentlichen Anteil zu leisten hat. Deswegen trägt das Buch den Untertitel: „Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen."

Die Aufnahme des Buches hat gezeigt, daß es einem wirklichen Bedürfnis entsprach: es hat nicht nur die Anerkennung vieler Hochschullehrer gefunden, sondern es ist ein wahres Arbeitsbuch für eine sehr große Zahl von Studenten geworden.
Unerwartet war es für den Verfasser, daß das Buch auch außerhalb der Hochschulen bei vielen Physikern und Ingenieuren eine sehr freundliche Aufnahme gefunden hat.

Nachdem der Springer-Verlag das Neuerscheinen des 4 Jahre nicht greifbaren Werkes ermöglicht hat, hat der Verfasser ohne wesentliche Vermehrung des Umfanges eine sehr gründliche Überarbeitung, Erweiterung des Inhaltes und Anpassung an den gegenwärtigen Stand des Wissens vorgenommen. Auch die Anzahl der Abbildungen ist beträchtlich vermehrt.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Wahrscheinlichkeitstheorie

Von Dr. **H. Richter**, o. Professor für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik an der Universität München. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 86.) Mit 14 Abbildungen. XII, 435 Seiten Gr.-8°. 1956.
DM 66.—; Ganzleinen DM 69.60

Der Beginn der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie kann um die Zeit des 1933 erschienenen Heftes „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" von A. Kolmogoroff in der Reihe „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" angesetzt werden. Von diesem Zeitpunkt an konnten verschiedene klassische Ergebnisse von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus verstanden und verschiedene Probleme durch die Verwendung der maßtheoretischen Hilfsmittel formuliert und bearbeitet werden. Die im deutschen Schrifttum vorliegenden Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind bis auf kleinere Einführungen in die Elemente der klassischen Theorie vor dem Beginn der neuen Entwicklung verfaßt worden. Sie können daher den heutigen Ansprüchen nicht mehr genügen. Diese Lücke möchte dieses Werk schließen. Der Leser soll soweit in die heutige Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt werden, daß er in der Lage ist, auch schwierigere moderne Untersuchungen zu studieren.

Um dem Leser die Durcharbeitung eines Lehrbuches der Maß- und Integrationstheorie zu ersparen, wurde versucht, aus der Maß- und Integrationstheorie das für die Wahrscheinlichkeitsrechnung Wichtige auszusondern und in dieses Buch als einen selbständig lesbaren Lehrgang einzubauen. An mathematischem Spezialwissen wird dabei nur das vorausgesetzt, was der Student in den ersten Semestern an reeller Analysis, Grundbegriffen der Funktionentheorie und linearer Algebra zu lernen pflegt. Vor allem wird aber angenommen, daß der Leser streng mathematisch zu denken gelernt hat.

An das Ende der einzelnen Paragraphen wurden Übungsaufgaben angefügt, die dem Leser zur Prüfung darüber dienen sollen, ob er das Gelesene voll verstanden hat. Dementsprechend sind die Aufgaben so formuliert, daß keine besonderen Kunstgriffe zu ihrer Lösung erforderlich sind. Nur einige wenige derjenigen Aufgaben, in denen Sätze als Ergänzung zum Lehrbuchtext bewiesen werden sollen, sind als schwieriger anzusehen. Es wurde auch bei ihnen auf einen Lösungshinweis verzichtet, um die Freude an der selbständigen Bearbeitung nicht zu stören. Die am Ende des Buches angegebenen Lösungen sind so knapp gehalten, daß sie nicht nur als Kontrolle, sondern auch als Anleitung zur Lösung dienen können.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG. Würzburg
Printed in Germany